VOLUME 15, NOMOR 2, OKTOBER 2013 ISSN 1410-9883

CAKRAWALA PENDIDIKAN

FORUM KOMUNIKASI ILMIAH DAN EKSPRESI KREATIF ILMU PENDIDIKAN

ISSN 1410-9883

CAKRAWALA PENDIDIKAN

Forum Komunikasi Ilmiah dan Ekspresi Kreatif Ilmu Pendidikan

Terbit dua kali setahun pada bulan April dan Oktober
Terbit pertama kali April 1999

Alamat Penerbit/Redaksi: STKIP PGRI Blitar, Jalan Kalimantan No. 111 Blitar, Telepon (0342)801493. Langganan 2 nomor setahun Rp 50.000,00 ditambah ongkos kirim Rp 5.000,00. Uang langganan dapat dikirim dengan wesel ke alamat Tata Usaha.

CAKRAWALA PENDIDIKAN diterbitkan oleh Sekolah Tinggi Keguruan dan Ilmu Pendidikan PGRI Blitar. **Ketua:** Dra. Hj. Karyati, M.Si, **Pembantu Ketua:** M. Khafid Irsyadi, ST, S.Pd

---

Penyunting menerima sumbangan tulisan yang belum pernah diterbitkan dalam media cetak lain. Syarat-syarat, format, dan aturan tata tulis artikel dapat diperiksa pada *Petunjuk bagi Penulis* di sampul belakang-dalam jurnal ini. Naskah yang masuk ditelaah oleh Penyunting dan Mitra Bestari untuk dinilai kelayakannya. Penyunting melakukan penyuntingan atau perubahan pada tulisan yang dimuat tanpa mengubah maksud isinya.

ISSN 1410-9883

CAKRAWALA PENDIDIKAN

Forum Komunikasi Ilmiah dan Ekspresi Kreatif Ilmu Pendidikan

Volume 15, Nomor 2, Oktober 2013

Daftar Isi

Desain sampul: H. Prawoto
Setting dan Cetak: IDC Malang, Telp./Faks. (0341)576 446, email: idc.malindo@gmail.com

Petunjuk Penulisan Cakrawala Pendidikan

1. Naskah belum pernah diterbitkan dalam media cetak lain, diketik spasi rangkap pada kertas kuarto, panjang 10–20 halaman, dan diserahkan paling lambat 3 bulan sebelum penerbitan, dalam bentuk ketikan di atas kertas sebanyak 2 eksemplar dan pada disket komputer IBM PC atau kompatibel. Berkas naskah pada disket komputer diketik dengan menggunakan pengolah kata *Microsoft Word*.
2. Artikel yang dimuat dalam jurnal ini meliputi tulisan tentang hasil penelitian, gagasan konseptual, kajian dan aplikasi teori, tinjauan kepustakaan, dan tinjauan buku baru.
3. Semua karangan ditulis dalam bentuk *esai*, disertai judul subbab *(heading)* masing-masing bagian, kecuali bagian pendahuluan yang disajikan tanpa judul subbab. Peringkat judul sub-bab dinyatakan dengan jenis huruf yang berbeda, letaknya rata tepi kiri halaman, dan tidak menggunakan nomor angka, sebagai berikut.

   PERINGKAT 1 (HURUF BESAR SEMUA TEBAL, RATA TEPI KIRI)
   Peringkat 2 (Huruf Besar-kecil Tebal, Rata Tepi Kiri)
   Peringkat 3 (Huruf Besar-kecil Tebal, Miring, Rata Tepi Kiri)

4. Artikel konseptual meliputi (a) judul, (b) nama penulis, (c) abstrak (50–75 kata), (d) kata kunci, (e) identitas penulis (tanpa gelar akademik), (f) pendahuluan yang berisi latar belakang dan tujuan atau ruang lingkup tulisan, (g) isi/pembahasan (terbagi atas sub-subjudul), (h) penutup, dan (i) daftar rujukan. Artikel hasil penelitian disajikan dengan sistematika: (a) judul, (b) nama (-nama) peneliti, (c) abstrak, (d) kata kunci, (e) identitas peneliti (tanpa gelar akademik) (f) pendahuluan berisi pembahasan kepustakaan dan tujuan penelitian, (g) metode, (h) hasil, (i) pembahasan, (j) kesimpulan dan saran, dan (k) daftar rujukan.
5. Daftar rujukan disajikan mengikuti tatacara seperti contoh berikut dan diurutkan secara alfabetis dan kronologis.

   Anderson, D.W., Vault, V.D., dan Dickson, C.E. 1993. *Problems and Prospects for the Decades Ahead: Competency Based Teacher Education.* Berkeley: McCutchan Publishing Co.
   Huda, N. 1991. *Penulisan Laporan Penelitian untuk Jurnal.* Makalah disajikan dalam Lokakarya Penelitian Tingkat Dasar bagi Dosen PTN dan PTS di Malang Angkatan XIV, Pusat Penelitian IKIP MALANG, Malang, 12 Juli.
   Prawoto. 1988. *Pengaruh Penginformasian Tujuan Pembelajaran dalam Modul terhadap Hasil Belajar Siswa SD PAMONG Kelas Jauh*. Tesis tidak diterbitkan. Malang: FPS IKIP MALANG..
   Russel, T. 1993. An Alternative Conception: Representing Representation. Dalam P.J. Black & A. Lucas (Eds.). *Children's Informal Ideas in Science* (hlm. 62-84). London: Routledge.
   Santosa, R. Gunawan. 2002. *Aplikasi Teorema Polya Pada Enumerasi Graf sederhana*, (online), (http://home.unpar.ac.id/integral.pdf.html, diakses 29 Desember 2006)
   Sihombing, U. 2003. *Pendataan Pendidikan Berbasis Masyarakat*. http://www.puskur.or.id. Diakses 21 April 2006
   Zainuddin, M.H. 1999. Meningkatkan Mutu Profesi Keguruan Indonesia. *Cakrawala Pendidikan*, 1(1):45–52.

6. Naskah diketik dengan memperhatikan aturan tentang penggunaan tanda baca dan ejaan yang dimuat dalam *Pedoman Umum Ejaan Bahasa Indonesia yang Disempurnakan* (Depdikbud, 1987).

KELAS FUNGSI YANG TERINTEGRALKAN SECARA RIEMANN

Vita Kusumasari
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang
vitakusumasari@yahoo.co.id

Abstrak: Integral Riemann dari f pada I didefinisikan sebagai nilai $L(f) = U(f)$ dan bilangan ini dinotasikan dengan $\int_a^b f$ atau $\int_a^b f(x)\,dx$, dimana $L(f)$ dan $U(f)$ masing-masing merupakan inte-gral bawah dan integral atas dari f pada I. Dari pengertian tentang integral Riemann, maka dapat diterapkan kriteria Riemann untuk keterintegralan suatu fungsi, yaitu fungsi f dikatakan terintegral-kan secara Riemann pada I jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat partisi P_ε dari I sedemikian sehingga $U(P_\varepsilon ; f) - L(P_\varepsilon ; f) < \varepsilon$. Selanjutnya, dengan menggunakan kriteria Riemann tersebut, fungsi f adalah terintegralkan secara Riemann pada I jika f mono-ton pada I atau f kontinu pada I.

Kata Kunci: integral Riemann, kriteria Riemann, monoton, kontinu

Abstract: Riemann integral of f on I is defined to be value $L(f) = U(f)$ dan this number is denoted by $\int_a^b f$ or $\int_a^b f(x)\,dx$, where $L(f)$ and $U(f)$ are lower and upper integral of f on I. From the defi-nition about Riemann integral, we can establish Riemann's crite-rion for integrability of a given function, i.e. a function f is said to be Riemann integrable on I if and only if for each $\varepsilon > 0$ there is a partition P_ε of I such that $U(P_\varepsilon ; f) - L(P_\varepsilon ; f) < \varepsilon$. Furthermore, by using Riemann's criterion, we can obtain that a function f is Rie-mann integrable on I if f monotone on I or f is continuous on I.

Kata Kunci: Riemann integral, Riemann's criterion, monotone, continuous

PENDAHULUAN

Dalam mempelajari integral dikenal dua bentuk integral, yaitu integral tak tentu dan integral tentu. Konsep integral pada awalnya dikemukakan oleh Newton dan Leibniz. Selanjutnya, Bernhard Riemann juga memberikan definisi mengenai integral yang dikenal dengan integral Riemann. Integral Riemann merupakan ben-tuk integral tentu.

Integral Riemann memiliki peran penting dalam berbagai bidang. Dalam bidang fisika misalnya, integral Riemann dapat digunakan untuk menghitung jarak tempuh dari benda yang bergerak jika diketahui kecepatannya, menentukan momen inersia dan pusat massa suatu benda. Begitu pula dalam bidang listrik dan elektronika, integral Riemann salah satunya digunakan untuk menghitung jumlah tenaga yang diberikan pada induktor selama arus naik pada selang waktu tertentu. dalam bidang bisnis dan ekonomi, integral Riemann digunakan dalam perhitungan masalah-masalah yang terkait dengan surplus konsumen dan surplus produsen. Sedangkan dalam bidang matematika sendiri, penggunaan integral Riemann antara lain adalah untuk menghitung luas daerah bidang rata, menghitung volume benda putar dan luas permukaan benda putar, dan menentukan panjang kurva dalam bidang.

Pada pembahasan tentang integral Riemann, terlebih dahulu didefinisikan mengenai integral atas dan integral bawah dari suatu fungsi. Suatu fungsi dikatakan terintegralkan secara Riemann jika integral atas dan integral bawah dari dari fungsi tersebut sama. Hal ini berbeda dengan definisi integral yang diberikan pada kalkulus. Pada kalkulus disebutkan bahwa suatu fungsi yang didefinisikan pada selang tutup [a, b] adalah terintegralkan pada [a, b] jika $\lim\limits_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i$ ada (Purcell, 2004). Dalam hal ini $|P|$ menyatakan panjang selang bagian yang terpanjang dari partisi P, $\overline{x_i}$ adalah titik sampel untuk selang bagian ke-i, dan Δx_i me-nyatakan panjang selang bagian ke-i. Selanjutnya, pada artikel ini akan diberikan pembuktian teorema keterintegralan dari fungsi monoton atau fungsi kontinu pada [a, b] dengan menggunakan kriteria Riemann.

TEORI PENDUKUNG

Pada bagian ini akan diberikan beberapa definisi dan teorema sebagai penunjang pembahasan. Pada bagian pertama akan diberikan uraian mengenai sistem bilangan real, terutama mengenai pengertian lingkungan. Bagian selanjutnya mengemukakan tentang pengertian supremum dan infimum beserta beberapa sifat yang menyertainya. Kemudian dilanjutkan dengan definisi mengenai barisan dan kekonvergenan barisan. Pada bagian tersebut dijelaskan pula mengenai barisan monoton. Sedangkan fungsi kontinu dan fungsi monoton masing-masing dibahas pada bagian berikutnya.

Sistem Bilangan Real

Dalam istilah aljabar, sistem bilangan real merupakan lapangan dengan dua operasi, yakni penjumlahan dan perkalian. Pada pembahasan tentang sistem bilangan real tentunya tidak terlepas dari sifat-sifat dari bilangan real. Salah satu sifat tersebut diberikan pada teorema berikut.

Teorema 2.1

Misalkan $x, y \in \boldsymbol{R}$, jika $x < y + \varepsilon$, untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka $x \le y$.

Bahasan lain pada sistem bilangan real adalah terkait dengan pengertian lingkungan. Sebagai ilustrasi, misalkan diberikan bilangan real a, maka suatu bilangan real x dikatakan dekat pada a apabila jarak antara a dan x, yang dinotasikan dengan $|x-a|$, sangat kecil. Sehubungan dengan hal itu, berikut ini diberikan definisi mengenai istilah lingkungan.

Definisi 2.2

Misal $a \in \boldsymbol{R}$ dan $\varepsilon > 0$, maka ***lingkungan-ε*** dari a adalah himpunan

$$V_\varepsilon(a) := \{x \in \boldsymbol{R} : |x-a| < \varepsilon\}$$

Supremum dan Infimum

Pada bagian ini akan diberikan definisi mengenai supremum dan infimum suatu himpunan. Tetapi sebelum itu, terlebih dahulu didefinisikan mengenai batas atas dan batas bawah dari suatu himpunan.

Definisi 2.3

Misalkan S merupakan himpunan bagian dari $\boldsymbol{R}$.

a) $u \in \boldsymbol{R}$ disebut ***batas atas*** dari S jika $s \le u$ untuk semua $s \in S$
b) $w \in \boldsymbol{R}$ disebut ***batas bawah*** dari S jika $w \le s$ untuk semua $s \in S$

Suatu himpunan bagian dari $\boldsymbol{R}$ dikatakan ***terbatas di atas*** jika memiliki batas atas. Demikian pula, himpunan tersebut dikatakan ***terbatas di bawah*** jika memiliki batas bawah. Jika suatu himpunan bagian dari $\boldsymbol{R}$

mempunyai batas atas dan batas bawah, maka himpunan tersebut dikatakan ***terbatas***. Sebaliknya, suatu him-punan bagian dari $\boldsymbol{R}$ ***tidak terbatas*** jika tidak mempunyai batas atas atau batas ba-wah.

Untuk selanjutnya, didefinisikan me-ngenai batas atas terkecil yang disebut su-premum dan batas bawah terbesar yang disebut infimum.

<u>Definisi 2.4</u>

Misalkan S merupakan himpunan bagian dari $\boldsymbol{R}$.

a) Jika S terbatas di atas, maka batas atas u disebut ***supremum*** (atau batas atas terkecil) dari S jika tidak ada bilangan yang lebih kecil dari u yang menjadi ba-tas atas dari S.
   Supremum dari himpunan S dinotasikan sebagai sup S.
b) Jika S terbatas di bawah, maka batas bawah w disebut ***infimum*** (atau batas bawah terbesar) dari S jika tidak ada bi-langan yang lebih besar dari w yang menjadi batas bawah dari S.
   Infimum dari himpunan S dinotasikan sebagai inf S.

Teorema berikut ini berkenaan dengan sifat dari supremum dan infimum dari suatu himpunan.

<u>Teorema 2.5</u>

Misalkan S adalah himpunan terbatas di $\boldsymbol{R}$, $S_0 \subseteq S$ dengan $S_0 \neq \varnothing$, maka
$\inf S \leq \inf S_0 \leq \sup S_0 \leq \sup S$**.**

Barisan

Barisan pada himpunan S adalah fungsi pada himpunan bilangan asli di-mana daerah hasil dari fungsi tersebut termuat dalam S. Bagian berikut ini berke-naan dengan bari-san pada $\boldsymbol{R}$.

<u>Definisi 2.6</u>

Barisan bilangan real (atau barisan pada $\boldsymbol{R}$) adalah fungsi pada himpunan bi-langan asli $\boldsymbol{N}$ yang mana daerah hasil dari fungsi tersebut termuat dalam him-punan bilangan real $\boldsymbol{R}$.

Dengan kata lain, barisan pada $\boldsymbol{R}$ me-masangkan setiap bilangan asli $n = 1, 2, 3, \ldots$ dengan bilangan real yang ditentukan secara tunggal. Bilangan real yang diperoleh tadi disebut ***elemen dari barisan*** atau ***nilai dari barisan***. Kemudian, ji-ka $X : \boldsymbol{N} \rightarrow \boldsymbol{R}$ adalah barisan, untuk menunjukkan nilai dari X pada n adalah de-ngan x_n. Notasi un-tuk barisan adalah X atau (x_n) atau $(x_n : n \in \boldsymbol{N})$.

Selanjutnya, definisi berikut menge-mukakan tentang limit dari suatu bari-san bilangan real.

<u>Definisi 2.7</u>

Misalkan $X = (x_n)$ adalah barisan bi-langan real. Suatu bilangan real x disebut ***limit*** dari (x_n) jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terda-pat bilangan asli $K(\varepsilon)$ sedemikian se-hingga x_n termuat dalam lingkungan $V_\varepsilon(x)$ untuk semua $n \geq K(\varepsilon)$.

Pernyataan x_n termuat dalam lingkung-an $V_\varepsilon(x)$ untuk semua $n \geq K(\varepsilon)$ dapat dinya-takan dengan $|x_n - x| < \varepsilon$ untuk semua $n \geq K(\varepsilon)$.

Jika x adalah limit dari barisan, maka dapat dikatakan bahwa $X = (x_n)$ kon-vergen ke x (atau memiliki limit x). Jika barisan memiliki limit, maka dikatakan barisan adalah ***konvergen***, tetapi jika barisan tidak memiliki limit maka dikatakan barisan tersebut adalah ***divergen***. Ketika barisan $X = (x_n)$ mempunyai limit x di $\boldsymbol{R}$, notasi yang digunakan adalah $\lim X = x$ atau $\lim (x_n) = x$.

Pengertian mengenai barisan naik, ba-risan turun, dan barisan monoton di-ke-mukakan pada definisi berikut ini.

<u>Definisi 2.8</u>

Misalkan $X = (x_n)$ merupakan barisan bilangan real. X dikatakan ***naik*** jika meme-nuhi $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \ldots$. X dikata-kan ***turun*** jika memenuhi $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \ldots$. X dikatakan ***monoton*** jika X naik atau X turun.

Tidak semua barisan adalah konvergen, tetapi teorema berikut dapat menunjukkan kekonvergenan dari barisan monoton.

Teorema 2.9

Jika (a_n) adalah barisan naik dan terbatas, maka $\lim (a_n) = \sup\{a_n\}$. Demikian pula, jika (b_n) adalah barisan turun dan terbatas, maka $\lim (b_n) = \inf\{b_n\}$.

Fungsi Kontinu

Fungsi kontinu memiliki peran yang cukup penting, Hal ini dikarenakan terdapat banyak fungsi yang merupakan fungsi kontinu, misalnya fungsi trigono-metri, fungsi logaritma, fungsi eksponensial, dan lain sebagainya. Sehingga pene-rapan-penerapan yang terkait dengan fungsi-fungsi tersebut tidak terlepas dari si-fat-sifat yang dimiliki oleh fungsi kontinu. Sehubungan dengan hal itu, definisi yang akan diberikan berikut ini berkenaan dengan fungsi kontinu di suatu titik dan kontinu pada suatu himpunan.

Definisi 2.10

Misalkan $A \subseteq \boldsymbol{R}$, $f: A \to \boldsymbol{R}$, dan $c \in A$. Fungsi f dikatakan ***kontinu*** di c, jika diberikan sebarang lingkungan $V_\varepsilon(f(c))$ dari $f(c)$ maka terdapat lingkungan $V_\delta(c)$ dari c sedemikian sehingga, jika x adalah sebarang titik dari $A \cap V_\delta(c)$ maka $f(x)$ termuat pada $V_\varepsilon(f(c))$. Kemudian, jika $B \subseteq A$, fungsi f dikatakan ***kontinu*** pada B jika f kontinu di setiap titik dari B.

Dari pendefinisian fungsi kontinu di atas, dapat diperoleh pernyataan-per-nyataan yang ekivalen berikut ini.

Teorema 2.11

Misalkan $A \subseteq \boldsymbol{R}$, $f: A \to \boldsymbol{R}$, dan $c \in A$, maka pernyatan-pernyataan di bawah ini adalah ekivalen.

a. Fungsi f kontinu di c
b. Untuk sebarang $\varepsilon > 0$, terdapat suatu $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk se-mua $x \in A$ dengan $|x - c| < \delta$, berlaku $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.
c. Jika (x_n) adalah sebarang barisan bilangan real sedemikian sehingga $x_n \in A$ untuk semua $n \in \boldsymbol{N}$ dan (x_n) konvergen ke c, maka $f((x_n))$ konvergen ke $f(c)$.

Definisi berikut mengemukakan tentang titik maksimum absolut dan titik minimum absolut untuk f pada suatu himpunan.

Definisi 2.12

Misalkan $A \subseteq \boldsymbol{R}$ dan $f: A \to \boldsymbol{R}$. Fungsi f dikatakan mempunyai ***maksimum absolut*** pada A jika terdapat titik $x^* \in A$ sedemikian sehingga $f(x^*) \geq f(x)$ un-tuk semua $x \in A$. Demikian pula, fungsi f dikatakan mempunyai ***minimum absolut*** pada A jika terdapat titik $x_* \in A$ sedemikian sehingga $f(x_*) \leq f(x)$ un-tuk semua $x \in A$. Kemudian, x^* disebut ***titik maksimum absolut*** untuk f pada A, dan x_* disebut ***titik mimimum absolut*** untuk f pada A.

Suatu fungsi f memiliki maksimum absolut dan minimum absolut pada I jika f kontinu pada I. Hal ini dinyatakan pada Teorema Maksimum-Minimum be-rikut.

Teorema 2.13 (Teorema Maksimum-Minimum)

Misalkan $I := [a, b]$ dan fungsi $f: I \to \boldsymbol{R}$ kontinu pada I, maka f memiliki maksimum absolut dan minimum absolut pada I.

Pada Definisi 2.10 sebelumnya didefinisikan mengenai fungsi yang konti-nu di suatu titik, atau pada suatu himpunan. Untuk selanjutnya, akan didefinisikan mengenai fungsi yang kontinu seragam pada suatu himpunan.

Definisi 2.14

Misalkan $A \subseteq \boldsymbol{R}$ dan $f: A \to \boldsymbol{R}$. Fungsi f dikatakan ***kontinu seragam*** pada A jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0$ sehingga jika sebarang x, $u \in A$ me-menuhi $|x - u| < \delta(\varepsilon)$, maka $|f(x) - f(u)| < \varepsilon$

Selanjutnya, suatu fungsi yang kontinu pada interval tertutup terbatas ada-lah kontinu seragam pada interval tersebut.

Teorema 2.15 (Teorema Kekontinuan Seragam)

Misalkan $I = [a, b]$ dan fungsi $f: I \to \boldsymbol{R}$ kontinu pada I, maka f kontinu sera-gam pada I.

Fungsi Monoton

Pada bagian ini akan diberikan pengertian mengenai fungsi monoton pada suatu himpunan.

Definisi 2.16

Misalkan $A \subseteq \boldsymbol{R}$, maka fungsi $f: A \to \boldsymbol{R}$ dikatakan ***naik*** pada A jika x_1, x_2 di A dan $x_1 < x_2$, maka $f(x_1) \le f(x_2)$. Fungsi f dikatakan ***naik kuat*** pada A jika $x_1, x_2 \in$ A dan $x_1 < x_2$, maka $f(x_1) < f(x_2)$.

Demikian pula, misalkan $A \subseteq \boldsymbol{R}$ dan g: $A \to \boldsymbol{R}$. Fungsi g dikatakan ***turun*** pada A jika x_1, x_2 di A dan $x_1 < x_2$, maka $g(x_1) \ge g(x_2)$. Fungsi g dikatakan ***turun kuat*** pada A jika $x_1, x_2 \in A$ dan $x_1 < x_2$, maka $g(x_1) > g(x_2)$.

Jika suatu fungsi naik atau turun pada A, maka fungsi tersebut dikatakan ***mo-noton*** pada A. Sama halnya jika fungsi f naik kuat atau turun kuat pada A, ma-ka f disebut ***monoton kuat*** pada A.

PEMBAHASAN

Selanjutnya, bagian ini akan dimulai dengan mendefinisikan keterintegralan Riemann dari suatu fungsi yang meliputi definisi mengenai fungsi yang terintegralkan secara Riemann dan integral Riemann dari fungsi itu sendiri. Tetapi sebe-lum itu, terlebih dahulu didefinisikan mengenai jumlah atas dan jumlah bawah dari suatu fungsi dilanjutkan dengan definisi dari integral atas dan integral bawah dari fungsi yang terkait. Kemudian akan dibahas mengenai kriteria Rieman untuk keterintegralan. Kriteria Riemann untuk keterintegralan ini memegang peranan penting untuk menunjukkan bahwa fungsi monoton atau fungsi kontinu adalah terintegralkan secara Riemann.

Integral Riemann

Sebelum mendefinisikan bahwa suatu fungsi terbatas, $f: I \to \boldsymbol{R}$ dengan $I = [a, b]$, adalah terintegralkan secara Riemann, maka terlebih dahulu didefinisi-kan mengenai jumlah atas dan jumlah bawah dari f, serta integral atas dan integral bawah dari f.

1. Jumlah Atas dan Jumlah Bawah

Misalkan $I := [a, b]$ pada $\boldsymbol{R}$, partisi dari I didefinisikan sebagai himpunan terurut $P := (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ dari titik-titik pada I sehingga $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

Titik-titik pada partisi P dapat digunakan untuk membagi I menjadi subinterval-subinterval, yaitu $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, …, $[x_{n-1}, x_n]$.

Misalkan $f: I \to \boldsymbol{R}$ fungsi terbatas pada I dan $P = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ partisi dari I. Untuk $k = 1, 2, \ldots, n$, m_k dan M_k masing-masing menyatakan

$m_k := \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$

$M_k := \sup\{f(x) : \mathrm{x} \in [x_{k-1}, x_k]\}$

Jumlah bawah dari f pada partisi P didefinisikan sebagai

$$L(P\,;f) := \sum_{k=1}^{n} m_k\,(x_k - x_{k-1})$$

dan ***jumlah atas*** dari f pada partisi P didefinisikan sebagai

$$U(P\,;f) := \sum_{k=1}^{n} M_k\,(x_k - x_{k-1})$$

Selanjutnya, untuk sebarang partisi dari I, jumlah bawah kurang dari atau sama dengan jumlah atas. Hal ini ditunjukkan pada teorema berikut.

Teorema 3.1

Jika fungsi $f: I \to \boldsymbol{R}$ terbatas dan P sebarang partisi dari I, maka $L(P\,;f) \le U(P\,;f)$. Misalkan $P := (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ dan $Q := (y_0, y_1, \ldots, y_m)$ adalah partisi dari I. Partisi Q dikatakan ***penghalusan (refinement)*** dari P jika setiap titik partisi $x_k \in P$ juga termuat dalam Q (dinotasikan dengan $P \subseteq Q$). Suatu penghalusan Q dari partisi P diperoleh dari penggabungan sejumlah hingga titik pada P. Dalam hal ini, masing-masing interval $[x_{k-1}, x_k]$ di P yang membagi I dapat ditulis sebagai gabungan interval yang titik akhirnya termuat dalam Q, yaitu

$[x_{k-1}, x_k] = [y_{j-1}, y_j] \cup [y_j, y_{j+1}] \cup \ldots \cup [y_{h-1}, y_h]$

Penghalusan suatu partisi akan memperbesar jumlah bawah dan memper-kecil jumlah atas. Sehubungan dengan hal tersebut, teorema berikut menyatakan bahwa $L(P\,;\,f) \le L(Q\,;\,f)$ dan $U(Q\,;\,f) \le U(P\,;\,f)$, dimana P adalah partisi dari I dan Q adalah penghalusan dari P.

Teorema 3.2

Jika fungsi $f: I \to \boldsymbol{R}$ terbatas, P adalah partisi dari I, dan Q adalah penghalus-an dari P, maka $L(P\,;\,f) \le L(Q\,;\,f)$ dan $U(Q\,;\,f) \le U(P\,;\,f)$.

Berdasarkan teorema di atas, dapat disimpulkan bahwa $L(P\,;\,f) \le \mathrm{U}(Q\,;\,f)$, dengan P dan Q adalah sebarang partisi dari I, seperti dinyatakan pada teorema berikut ini.

Teorema 3.3

Misalkan fungsi $f: I \to \boldsymbol{R}$ terbatas. Jika P_1 dan P_2 adalah sebarang partisi dari I, maka $L(P_1\,;\,f) \le \mathrm{U}(P_2\,;\,f)$.

2. Integral Atas dan Integral Bawah

Misalkan $\wp(I)$ adalah koleksi semua partisi dari interval $I = [a, b]$. Jika fungsi $f: I \to \boldsymbol{R}$ terbatas, maka setiap P pada $\wp(I)$ menentukan dua bilangan, ya-itu $L(P\,;\,f)$ dan $\mathrm{U}(P\,;\,f)$. Kemudian, koleksi $\wp(I)$ menentukan dua himpunan bi-langan, yaitu himpunan jumlah bawah $L(P\,;\,f)$ untuk $P \in \wp(I)$ dan himpunan jum-lah atas $U(P\,;\,f)$ untuk $P \in \wp(I)$. Selanjutnya, definisi mengenai integral atas dan integral bawah dari fungsi terbatas $f: I \to \boldsymbol{R}$ dengan $I = [a, b]$, adalah sebagai beri-kut.

Definisi 3.4

Misalkan $I := [a, b]$ dan $f: I \to \boldsymbol{R}$ fungsi terbatas.

Integral bawah dari f pada I adalah $L(f) := \sup\{L(P\,;\,f) : P \in \wp(I)\}$

Integral atas dari f pada I adalah $U(f) := \inf\{U(P\,;\,f) : P \in \wp(I)\}$

Oleh karena f adalah fungsi terbatas, maka $m_I := \inf\{f(x) : x \in I\}$ dan $M_I := \sup\{f(x) : x \in I\}$ ada. Akibatnya, untuk sebarang $P \in \wp(I)$, berlaku

$m_I(b-a) \le L(P\,;\,f) \le U(P\,;\,f) \le M_I(b-a)$.

Karena itu, diperoleh bahwa $m_I(b-a) \le L(f)$ dan $U(f) \le M_I(b-a)$.

Teorema berikut ini menjamin keberadaan dari integral atas dan integral bawah suatu fungsi. Selanjutnya, integral bawah tersebut akan kurang dari atau sa-ma dengan integral atas.

Teorema 3.5

Jika $I = [a, b]$ dan $f: I \to \boldsymbol{R}$ fungsi terbatas, maka integral bawah $L(f)$ dan integral atas $U(f)$ dari f pada I ada dan $L(f) \le U(f)$.

Terdapat beberapa sifat dari integral atas dan integral bawah. Sifat tersebut antara lain adalah integral bawah dari suatu fungsi bernilai positif jika fungsi ter-sebut juga bernilai positif, kemudian nilai suatu fungsi adalah nol jika integral ba-wah dari fungsi tersebut bernilai nol. Sifat-sifat tersebut diuraikan sebagai berikut.

a. Misalkan $I = [a, b]$, fungsi $f: I \to \boldsymbol{R}$ terbatas, dan $f(x) \ge 0$ untuk semua $x \in I$, maka $L(f) \ge 0$.
b. Misalkan $I = [a, b]$, fungsi $f: I \to \boldsymbol{R}$ kontinu, dan $f(x) \ge 0$ untuk semua $x \in I$. Jika $L(f) = 0$, maka $f(x) = 0$ untuk semua $x \in I$.

3. Integral Riemann

Misalkan $I = [a, b]$ dan $f: I \to \boldsymbol{R}$ fungsi terbatas, menurut Teorema 3.5, integral bawah $L(f)$ dan integral atas $U(f)$ selalu ada dan $L(f) \le U(f)$. Fungsi de-ngan $L(f) = U(f)$ dikatakan sebagai fungsi yang terintegralkan dan nilai bersama dari $L(f)$ dan $U(f)$ ini disebut sebagai integral dari f pada I. Oleh karena itu, beri-kut ini diberikan definisi yang berkenaan dengan Integral Riemann dari fungsi terbatas pada I.

Definisi 3.6

Misalkan $I := [a, b]$ dan $f: I \to \boldsymbol{R}$ fungsi terbatas. Fungsi f dikatakan ***terintegralkan secara Riemann*** pada I jika $L(f) = U(f)$.

Pada kasus ini, ***integral Riemann*** dari f pada I didefinisikan sebagai nilai $L(f) = U(f)$ dan bilangan ini dinotasikan dengan

$\int_a^b f$ atau $\int_a^b f(x)\,dx$. Sebagai tambahan, didefinisikan bahwa $\int_b^a f = -\int_a^b f$ dan $\int_a^a f = 0$.

Untuk selanjutnya, misal f terintegralkan secara Riemann pada I, cukup dikatakan sebagai f terintegralkan pada I.

Kriteria Riemann untuk Keterintegralan

Sesuai dengan Definisi 3.6 tentang integral Riemann dari suatu fungsi, maka dapat diterapkan suatu kriteria untuk menentukan apakah fungsi yang diberikan terintegralkan pada I atau tidak. Kriteria ini selanjutnya disebut sebagai kriteria Riemann untuk keterintegralan seperti dinyatakan pada teorema berikut ini.

<u>Teorema 3.7 (Kriteria Riemann untuk Keterintegralan)</u>

Misalkan $I := [a, b]$ dan $f: I \to \boldsymbol{R}$ fungsi terbatas pada I. Fungsi f dikatakan terintegralkan pada I jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat partisi P_ε dari I sedemikian sehingga $U(P_\varepsilon\,;\,f) - L(P_\varepsilon\,;\,f) < \varepsilon$.

Bukti:

Karena f terintegralkan maka diperoleh $L(f) = U(f)$. Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena $L(f) = \sup\{L(P\,;\,f) : P \in \wp(I)\}$, maka terdapat partisi pada P_1 dari I sedemikian sehingga $L(f) - \frac{\varepsilon}{2} < L(P_1\,;\,f)$. Demikian pula, terdapat partisi pada P_2 dari I sedemikian sehingga $U(P_2\,;\,f) < U(f) + \frac{\varepsilon}{2}$.

Misalkan $P_\varepsilon = P_1 \cup P_2$, berarti P_ε merupakan penghalusan dari P_1 dan P_2. Oleh ka-rena itu, diperoleh

$L(f) - \frac{\varepsilon}{2} < L(P_1\,;\,f) \leq L(P_\varepsilon\,;\,f) \leq U(P_\varepsilon\,;\,f) \leq U(P_2\,;\,f) < U(f) + \frac{\varepsilon}{2}$.

Hal ini mengakibatkan $L(f) - \frac{\varepsilon}{2} < L(P_\varepsilon\,;\,f)$ dan $U(P_\varepsilon\,;\,f) < U(f) + \frac{\varepsilon}{2}$, sehingga

$U(P_\varepsilon\,;\,f) - L(P_\varepsilon\,;\,f) < U(f) + \frac{\varepsilon}{2} - (L(f) - \frac{\varepsilon}{2})$.

Karena $L(f) = U(f)$, maka diperoleh $U(P_\varepsilon\,;\,f) - L(P_\varepsilon\,;\,f) < \varepsilon$.

Sebaliknya, misalkan P sebarang partisi dari I maka didapat bahwa
$L(P\,;\,f) \leq L(f)$ dan $U(f) \leq U(P\,;\,f)$. Karena itu, $U(f) - L(f) \leq U(P\,;\,f) - L(P\,;\,f)$. Ambil $\varepsilon > 0$. Maka terdapat partisi P_ε sedemikian sehingga $U(P_\varepsilon\,;\,f) - L(P_\varepsilon\,;\,f) < \varepsilon$. Akibatnya, $U(f) - L(f) \leq U(P_\varepsilon\,;\,f) - L(P_\varepsilon\,;\,f) < \varepsilon$.
Karena $\varepsilon > 0$ sebarang maka $U(f) \leq L(f)$. Sementara itu, $L(f) \leq U(f)$ sehingga disimpulkan bahwa $U(f) = L(f)$.

Dengan demikian, f terintegralkan pada I. Selanjutnya, dengan menggunakan kriteria Riemann untuk keterintegralan, dapat diperoleh bahwa fungsi f terintegralkan pada I jika terdapat suati barisan partisi $\{P_n : n \in \boldsymbol{N}\}$ dari I sedemikian sehingga $lim(U(P_n\,;\,f) - L(P_n\,;\,f)) = 0$. Uraian di atas dinyatakan pada teorema berikut ini

<u>Teorema 3.8</u>

Misalkan $I := [a, b]$ dan $f: I \to \boldsymbol{R}$ fungsi terbatas. Jika $\{P_n : n \in \boldsymbol{N}\}$ adalah ba-risan partisi dari I sedemikian sehingga $lim(U(P_n\,;\,f) - L(P_n\,;\,f)) = 0$, maka f terintegralkan pada I dan $lim\, L(P_n\,;\,f) = \int_a^b f = lim\, U(P_n\,;\,f)$.

Bukti:

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena $lim(U(P_n\,;\,f) - L(P_n\,;\,f)) = 0$, maka terdapat $K \in \boldsymbol{N}$ sedemikian sehingga untuk $n \geq K$ berlaku $U(P_n\,;\,f) - L(P_n\,;\,f) < \varepsilon$.
Pilih $P_\varepsilon = P_K$, maka diperoleh $U(P_\varepsilon\,;\,f) - L(P_\varepsilon\,;\,f) < \varepsilon$.
Dengan demikian f terintegralkan pada I.
Misalkan $\{P_n : n \in \boldsymbol{N}\}$ merupakan barisan partisi dari I sedemikian sehingga

$P_n \subseteq P_{n+1}$. Akibatnya $L(P_n\ ;\ f) \leq L(P_{n+1}\ ;\ f)$, sehingga $L(P_n\ ;\ f)$ untuk $n \in \boldsymbol{N}$ merupakan barisan naik dan terbatas.

Karenanya diperoleh bahwa $lim\ L(P_n\ ;\ f) = \sup\{L(P_n\ ;\ f) : n \in \boldsymbol{N}\}$.

Demikian pula $U(P_{n+1}\ ;\ f) \leq U(P_n\ ;\ f)$, sehingga $U(P_n\ ;\ f)$ untuk $n \in \boldsymbol{N}$ merupa-kan barisan turun dan terbatas.

Karenanya diperoleh bahwa $lim\ U(P_n\ ;\ f) = \inf\{U(P_n\ ;\ f) : n \in \boldsymbol{N}\}$.

Karena himpunan partisi $\{P_n : n \in \boldsymbol{N}\} \subseteq \wp(I)$, maka $lim\ L(P_n\ ;\ f) = \sup\{L(P_n\ ;\ f) : n \in \boldsymbol{N}\} \leq \sup\{L(P\ ;\ f) : P \in \wp(I)\} = L(f)$ dan $U(f) = \inf\{U(P\ ;\ f) : P \in \wp(I)\} \leq \inf\{U(P_n\ ;\ f) : n \in \boldsymbol{N}\} = lim\ U(P_n\ ;\ f)$.

Diketahui bahwa $lim(U(P_n\ ;\ f) - L(P_n\ ;\ f)) = 0$, maka didapat bahwa $lim\ U(P_n\ ;\ f) = lim\ L(P_n\ ;\ f)$. Karena $lim\ L(P_n\ ;\ f) \leq L(f) \leq U(f) \leq lim\ U(P_n\ ;\ f)$, maka $L(f) = U(f) = lim\ U(P_n\ ;\ f) = lim\ L(P_n\ ;\ f)$. Dengan demikian $lim\ L(P_n\ ;\ f) = \int_a^b f = lim\ U(P_n\ ;\ f)$.

Dengan menggunakan Teorema 3.8, maka untuk menentukan keterinte-gralan dari suatu fungsi, harus ditunjukkan bahwa terdapat $\{P_n : n \in \boldsymbol{N}\}$ yang me-rupakan ba-risan partisi dari I sedemikian sehingga $lim(U(P_n\ ;\ f) - L(P_n\ ;\ f)) = 0$. Diperoleh pula bahwa $lim\ L(P_n\ ;\ f) = \int_a^b f = lim\ U(P_n\ ;\ f)$.

Oleh karena itu, berikut ini diberikan contoh yang merupakan penerapan Teorema 3.8 tersebut.

Contoh:

Misalkan $I := [-1, 3]$ dan $f: I \to \boldsymbol{R}$ dengan $f(x) := 2x^2 - 8$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $f(x) := 2x^2 - 8$ terintegralkan pada [-1, 3].

Misalkan P_n merupakan partisi dari $I = [-1, 3]$ yaitu

$$P_n := (-1, -1+\frac{1}{n}, -1+\frac{2}{n}, \ldots, -1+\frac{n}{n} = 0, \frac{2}{n}, \frac{6}{n}, \ldots, \frac{3(n-1)}{n}, \frac{3n}{n} = 3)$$

Infimun dan supremum dari f, untuk $k = 1, 2, \ldots, n$ adalah

Untuk subinterval $[-1+\frac{k-1}{n}, -1+\frac{k}{n}]$, misalkan

$$\sup\{f(x) : x \in [-1+\frac{k-1}{n}, -1+\frac{k}{n}]\} = M_k^1,$$

$$\inf\{f(x) : x \in [-1+\frac{k-1}{n}, -1+\frac{k}{n}]\} = m_k^1, \text{ dan}$$

$\Delta x_1 = x_k - x_{k-1}$ maka diperoleh

$$m_k^1 = 2(-1+\frac{k}{n})^2 - 8,\ M_k^1 = 2(-1+\frac{k-1}{n})^2 - 8, \text{ dan } \Delta x_1 = \frac{1}{n}.$$

Kemudian untuk subinterval $[\frac{3(k-1)}{n}, \frac{3k}{n}]$, misalkan

$$\sup\{f(x) : x \in [\frac{3(k-1)}{n}, \frac{3k}{n}]\} = M_k^2,$$

$$\inf\{f(x) : x \in [\frac{3(k-1)}{n}, \frac{3k}{n}]\} = m_k^2, \text{ dan}$$

$\Delta x_2 = x_k - x_{k-1}$ maka diperoleh

$$m_k^2 = 2(\frac{3(k-1)}{n})^2 - 8,\ M_k^2 = 2(\frac{3k}{n})^2 - 8, \text{ dan } \Delta x_2 = \frac{3}{n}.$$

Sehingga didapat

$$L(P_n\,;\,f) = \sum_{k=1}^{n}(m_k^1\Delta x_1 + m_k^2\Delta x_2)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}((2(-1+\frac{k}{n})^2 - 8)\frac{1}{n} + (2(\frac{3(k-1)}{n})^2 - 8)\frac{3}{n})$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(-\frac{6}{n} - \frac{4}{n^2}k + \frac{2}{n^3}k^2 + \frac{54}{n^3}k^2 - \frac{108}{n^3}k + \frac{54}{n^3} - \frac{24}{n})$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(-\frac{30}{n} - \frac{4}{n^2}k + \frac{54}{n^3} - \frac{108}{n^3}k + \frac{56}{n^3}k^2)$$
$$= -\frac{40}{3} - \frac{28}{n} + \frac{28}{3n^2} \text{ dan}$$

$$U(P_n\,;\,f) = \sum_{k=1}^{n}(M_k^1\Delta x_1 + M_k^2\Delta x_2)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}((2(-1+\frac{k-1}{n})^2 - 8)\frac{1}{n} + (2(\frac{3k}{n})^2 - 8)\frac{3}{n})$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(-\frac{6}{n} - \frac{4}{n^2}k + \frac{4}{n^2} + \frac{2}{n^3}k^2 - \frac{4}{n^3}k + \frac{2}{n^3} + \frac{54}{n^3}k^2 - \frac{24}{n})$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(-\frac{30}{n} + \frac{4}{n^2} - \frac{4}{n^2}k + \frac{2}{n^3} - \frac{4}{n^3}k + \frac{56}{n^3}k^2)$$
$$= -\frac{40}{3} + \frac{28}{n} + \frac{28}{3n^2}$$

Karena itu,

$$lim(U(P_n\,;\,f) - L(P_n\,;\,f)) = lim\,((-\frac{40}{3} + \frac{28}{n} + \frac{28}{3n^2}) - (-\frac{40}{3} - \frac{28}{n} + \frac{28}{3n^2}))$$
$$= lim\frac{56}{n} = 56(lim\frac{1}{n}) = 0$$

Dengan demikian, $\int_{-1}^{3} 2x^2 - 8dx = lim\,U(P_n\,;\,f)$

$$= lim\,(-\frac{40}{3} + \frac{28}{n} + \frac{28}{3n^2}) = -\frac{40}{3}$$

Keterintegralan dari Fungsi Monoton

Pada akhirnya, kriteria Riemann untuk keterintegralan dapat diterapkan untuk menunjukkan bahwa fungsi yang monoton pada interval $I = [a, b]$ adalah terintegralkan pada I.

Teorema 3.9

Misalkan $I = [a, b]$ dan $f: I \to \boldsymbol{R}$ monoton pada I, maka f terintegralkan pada I.

Bukti:

Anggap bahwa f naik pada I. Misal diberikan barisan partisi (P_n) dengan $P_n := (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ adalah partisi dari I dalam n bagian yang sama, maka didapat bahwa $x_k - x_{k-1} = \dfrac{b-a}{n}$ untuk k = 1, 2, …, n.

Karena f naik pada $[x_{k-1}, x_k]$, maka $m_k = f(x_{k-1})$ dan $M_k = f(x_k)$ untuk k = 1, 2, …, n. Oleh karena itu, diperoleh bahwa

$$
\begin{aligned}
U(P_n\,;f) - L(P_n\,;f) &= \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (M_k(x_k - x_{k-1}) - m_k(x_k - x_{k-1})) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))\frac{b-a}{n} \\
&= \frac{b-a}{n}\,(f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \ldots + f(x_n) - f(x_{n-1})) \\
&= \frac{b-a}{n}\,(f(x_n) - f(x_0)) \\
&= \frac{b-a}{n}\,(f(b) - f(a))
\end{aligned}
$$

Diberikan $\varepsilon > 0$, maka $K \in \boldsymbol{N}$ sedemikian sehingga $K > \dfrac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\varepsilon}$.

Untuk $n \geq K$ diperoleh

$$
\begin{aligned}
U(P_n\,;f) - L(P_n\,;f) &= \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \\
&= \frac{b-a}{n}\,(f(b) - f(a)) \\
&\leq \frac{b-a}{K}\,(f(b) - f(a)) < \varepsilon
\end{aligned}
$$

Jadi $\lim U(P_n\,;f) - L(P_n\,;f) = 0$

Dengan demikian f terintegralkan pada I.

Keterintegralan dari Fungsi Kontinu

Demikian pula, kriteria Riemann untuk keterintegralan juga dapat diterap-kan untuk menunjukkan bahwa fungsi yang kontinu pada interval $I = [a, b]$ adalah terintegralkan pada I.

<u>Teorema 3.10</u>

Misalkan $I = [a, b]$ dan fungsi $f: I \rightarrow \boldsymbol{R}$ kontinu pada I, maka f terintegralkan pada I.

Bukti:

Karena I merupakan interval tertutup terbatas dan $f: I \rightarrow \boldsymbol{R}$ kontinu pada I, maka f kontinu seragam pada I. Misalkan (P_n) barisan partisi dengan $P_n := (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ merupakan partisi dari I dalam n bagian yang sama, maka $x_k - x_{k-1} = \dfrac{b-a}{n}$ untuk k = 1, 2, …, n. Ambil $\varepsilon > 0$, karena f kontinu seragam, pilih $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $u, v \in I$ dan $|u - v| < \delta$, maka $|f(u) - f(v)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Pilih $K \in \boldsymbol{N}$ sedemikian sehingga $K > \dfrac{b-a}{\delta}$.

Karena $[x_{k-1}, x_k]$ merupakan interval tertutup terbatas, dan f kontinu seragam pada I maka f kontinu pada $[x_{k-1}, x_k]$. Oleh karena itu, terdapat titik u_k, v_k pada $[x_{k-1}, x_k]$ sedemikian sehingga $f(u_k) = M_k$ dan $f(v_k) = m_k$. Perhatikan bahwa untuk partisi P_n dengan $n \geq K$ berlaku, $M_k - m_k = f(u_k) - f(v_k) < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$

Akibatnya, $U(P_n ; f) - L(P_n ; f) =$

$$\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)(x_k - x_{k-1})$$

$$< \sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{b-a}\frac{b-a}{n} = \varepsilon$$

Jadi $\lim U(P_n ; f) - L(P_n ; f) = 0$
Dengan demikian f terintegralkan pada I.

PENUTUP

Berdasarkan pembahasan di atas, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

1. Misalkan I merupakan interval tertutup terbatas dan $f: I \to \mathbf{R}$ adalah fungsi terbatas. Fungsi f dikatakan terintegralkan secara Riemann pada I jika $L(f) = U(f)$. Integral Riemann dari f atas I adalah nilai dari $L(f)$ dan $U(f)$ tersebut yang dinotasikan dengan $\int_a^b f$ atau $\int_a^b f(x)\,dx$.
   Dalam hal ini, $L(f)$ adalah inte-gral bawah dari f pada I, yaitu $L(f) = \sup\{L(P ; f) : P \in \wp(I)\}$, dan $U(f)$ adalah integral atas dari f pada I, yaitu $U(f) = \inf\{U(P ; f) : P \in \wp(I)\}$.
   Sedangkan $L(P ; f)$ dan $U(P ; f)$ masing-masing merupakan jumlah bawah dan jumlah atas dari f yang berkorespondensi pada partisi P, yaitu $L(P ; f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$ dan $U(P ; f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$, dimana $m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ dan $M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ untuk $k = 1, 2, \ldots, n$.

2a. Kriteria Riemann untuk keterintegralan menyatakan bahwa f terintegralkan pada I jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat partisi P_ε dari I sedemi-kian sehingga $U(P_\varepsilon ; f) - L(P_\varepsilon ; f) < \varepsilon$. Selanjutnya, dengan menggunakan kri-teria Riemann untuk keterintegralan tersebut, dapat diperoleh bahwa f terinte-gralkan pada I jika terdapat $\{P_n : n \in \mathbf{N}\}$ yang merupakan barisan partisi dari I sedemikian sehingga $\lim(U(P_n ; f) - L(P_n ; f)) = 0$. Dengan demikian,

$$\lim L(P_n ; f) = \int_a^b f = \lim U(P_n ; f).$$

b. Dengan menggunakan kriteria Riemann untuk keterintegralan, maka dapat diperoleh bahwa fungsi monoton pada interval $I = [a, b]$ adalah terintegralkan pada I.

c. Demikian pula, diperoleh bahwa fungsi yang kontinu pada interval $I = [a, b]$ adalah terintegralkan pada I.

DAFTAR RUJUKAN

Bartle, Robert G. & Sherbert, Donald R. 1992. *Introduction to Real Analysis, Second Edition.* New York: John Wiley & Sons, Inc.

Bartle, Robert G. & Sherbert, Donald R. 2011. *Introduction to Real Analysis, Fourth Edition.* New York: John Wiley & Sons, Inc.

Lewin, Jonathan & Lewin, Myrtle. 1993. *An Introduction to Mathematical Analy-sis.* Singapore: McGraw-Hill, Inc.

Stoll, Manfred. 2001. *Introduction to Real Analysis.* Boston: Addison Wasley Longman, Inc.

Purcell, Edwin J., Varberg, Dale & Rigdon, Steven E, Edisi Kedelapan. 2004. *Kalkulus*. Jakarta: Erlangga.