

# CAKRAWALA PENDIDIKAN

## FORUM KOMUNIKASI ILMIAH DAN EKSPRESI KREATIF ILMU PENDIDIKAN

Peningkatan Kualitas Guru dan Pendidikan

Pemahaman Karakteristik Peserta Didik dan Masalah Belajar

Implementasi Otonomi Daerah dalam Kerangka Negara Kesatuan Republik Indonesia

Pengaruh Konstruktivisme dalam Pembelajaran

Kelas Fungsi yang Terintegralkan Secara Riemann

An Analysis on Intrinsic Aspects and Extrinsic Aspects in Stephen Crane's  
Novel "The Red Badge of Courage"

Implementasi Teori Belajar Gagne untuk Meningkatkan Hasil Belajar Siswa

Aplikasi Teorema Polya untuk Menghitung Banyaknya Graf Sederhana  
yang Tidak Isomorfik

Pembelajaran the Power of Two Dengan Giving Questions & Getting Answer  
pada Matakuliah Matematika Diskrit

Penerapan Pembelajaran Inquiry pada Materi Pengujian Hipotesis

The Structure of English Complement in Time-Life Books

The Application of Calla Method to Improve Reading Comprehension  
on Narrative Text for the Students of SMP

Pembelajaran Giving Question and Getting Answer untuk Meningkatkan  
Kemampuan Berpikir Kritis pada Mata Kuliah Aljabar Linier bagi Mahasiswa

Implementasi Model Pembelajaran Student Facilitator and Explaining untuk  
Meningkatkan Hasil Belajar pada Materi Persamaan Linier Satu Variabel

Upaya Meningkatkan Berfikir Kreatif melalui Pembelajaran Kooperatif  
Tipe TAI Berdasarkan Teori Beban Kognitif

# CAKRAWALA PENDIDIKAN

Forum Komunikasi Ilmiah dan Ekspresi Kreatif Ilmu Pendidikan

Terbit dua kali setahun pada bulan April dan Oktober  
Terbit pertama kali April 1999

## **Ketua Penyunting**

Kadeni

## **Wakil Ketua Penyunting**

Syaiful Rifa'i

## **Penyunting Pelaksana**

R. Hendro Prasetianto

Udin Erawanto

Riki Suliana

Prawoto

## **Penyunting Ahli**

Miranu Triantoro

Masruri

Karyati

Nurhadi

## **Pelaksana Tata Usaha**

Yunus

Nandir

Sunardi

---

**Alamat Penerbit/Redaksi:** STKIP PGRI Blitar, Jalan Kalimantan No. 111 Blitar, Telepon (0342)801493. Langganan 2 nomor setahun Rp 50.000,00 ditambah ongkos kirim Rp 5.000,00. Uang langganan dapat dikirim dengan wesel ke alamat Tata Usaha.

---

**CAKRAWALA PENDIDIKAN** diterbitkan oleh Sekolah Tinggi Keguruan dan Ilmu Pendidikan PGRI Blitar. **Ketua:** Dra. Hj. Karyati, M.Si, **Pembantu Ketua:** M. Khafid Irsyadi, ST, S.Pd

---

Penyunting menerima sumbangan tulisan yang belum pernah diterbitkan dalam media cetak lain. Syarat-syarat, format, dan aturan tata tulis artikel dapat diperiksa pada *Petunjuk bagi Penulis* di sampul belakang-dalam jurnal ini. Naskah yang masuk ditelaah oleh Penyunting dan Mitra Bestari untuk dinilai kelayakannya. Penyunting melakukan penyuntingan atau perubahan pada tulisan yang dimuat tanpa mengubah maksud isinya.

---

**CAKRAWALA PENDIDIKAN**  
**Forum Komunikasi Ilmiah dan Ekspresi Kreatif Ilmu Pendidikan**  
 Volume 15, Nomor 2, Oktober 2013

---



---

**Daftar Isi**

Peningkatan Kualitas Guru dan Pendidikan ..... <i>Endang Wahyuni</i>	129
Pemahaman Karakteristik Peserta Didik dan Masalah Belajar ..... <i>Kadeni</i>	135
Implementasi Otonomi Daerah dalam Kerangka Negara Kesatuan Republik Indonesia ..... <i>Miranu Triantoro</i>	143
Pengaruh Konstruktivisme dalam Pembelajaran ..... <i>Udin Erawanto</i>	150
Kelas Fungsi yang Terintegralkan Secara Riemann ..... <i>Vita Kusumasari</i>	157
An Analysis on Intrinsic Aspects and Extrinsic Aspects in Stephen Crane's Novel "The Red Badge of Courage" ..... <i>Wiratno</i>	168
Implementasi Teori Belajar Gagne untuk Meningkatkan Hasil Belajar Siswa ..... <i>Cicik Pramesti</i>	175
Aplikasi Teorema Polya untuk Menghitung Banyaknya Graf Sederhana yang Tidak Isomorfik ... <i>Khomsatun Ni'mah</i>	184
Pembelajaran the Power of Two Dengan Giving Questions & Getting Answer pada Matakuliah Matematika Diskrit ..... <i>Kristiani</i>	194
Penerapan Pembelajaran Inquiry pada Materi Pengujian Hipotesis ..... <i>Mohamad Khafid Irsyadi</i>	203
The Structure of English Complement in Time-Life Books ..... <i>R. Hendro Prasetianto</i>	210
The Application of Calla Method to Improve Reading Comprehension on Narrative Text for the Students of SMP ..... <i>Saiful Rifa'i</i>	218
Pembelajaran Giving Question and Getting Answer untuk Meningkatkan Kemampuan Berpikir Kritis pada Mata Kuliah Aljabar Linier bagi Mahasiswa ..... <i>Suryanti</i>	230
Implementasi Model Pembelajaran Student Facilitator and Explaining untuk Meningkatkan Hasil Belajar pada Materi Persamaan Linier Satu Variabel ..... <i>Yovita Viandari</i>	236
Upaya Meningkatkan Berfikir Kreatif melalui Pembelajaran Kooperatif Tipe TAI Berdasarkan Teori Beban Kognitif ..... <i>Zemmy Indra Kumala Dewi</i>	243

## Petunjuk Penulisan Cakrawala Pendidikan

1. Naskah belum pernah diterbitkan dalam media cetak lain, diketik spasi rangkap pada kertas kuarto, panjang 10–20 halaman, dan diserahkan paling lambat 3 bulan sebelum penerbitan, dalam bentuk ketikan di atas kertas sebanyak 2 eksemplar dan pada disket komputer IBM PC atau kompatibel. Berkas naskah pada disket komputer diketik dengan menggunakan pengolah kata *Microsoft Word*.
2. Artikel yang dimuat dalam jurnal ini meliputi tulisan tentang hasil penelitian, gagasan konseptual, kajian dan aplikasi teori, tinjauan kepastakaan, dan tinjauan buku baru.
3. Semua karangan ditulis dalam bentuk *esai*, disertai judul subbab (*heading*) masing-masing bagian, kecuali bagian pendahuluan yang disajikan tanpa judul subbab. Peringkat judul sub-bab dinyatakan dengan jenis huruf yang berbeda, letaknya rata tepi kiri halaman, dan tidak menggunakan nomor angka, sebagai berikut.

PERINGKAT 1 (HURUF BESAR SEMUA TEBAL, RATA TEPI KIRI)

Peringkat 2 (Huruf Besar-kecil Tebal, Rata Tepi Kiri)

Peringkat 3 (Huruf Besar-kecil Tebal, Miring, Rata Tepi Kiri)

4. Artikel konseptual meliputi (a) judul, (b) nama penulis, (c) abstrak (50–75 kata), (d) kata kunci, (e) identitas penulis (tanpa gelar akademik), (f) pendahuluan yang berisi latar belakang dan tujuan atau ruang lingkup tulisan, (g) isi/pembahasan (terbagi atas sub-subjudul), (h) penutup, dan (i) daftar rujukan. Artikel hasil penelitian disajikan dengan sistematika: (a) judul, (b) nama (-nama) peneliti, (c) abstrak, (d) kata kunci, (e) identitas peneliti (tanpa gelar akademik) (f) pendahuluan berisi pembahasan kepastakaan dan tujuan penelitian, (g) metode, (h) hasil, (i) pembahasan, (j) kesimpulan dan saran, dan (k) daftar rujukan.
5. Daftar rujukan disajikan mengikuti tatacara seperti contoh berikut dan diurutkan secara alfabetis dan kronologis.

Anderson, D.W., Vault, V.D., dan Dickson, C.E. 1993. *Problems and Prospects for the Decades Ahead: Competency Based Teacher Education*. Berkeley: McCutchan Publishing Co.

Huda, N. 1991. *Penulisan Laporan Penelitian untuk Jurnal*. Makalah disajikan dalam Lokakarya Penelitian Tingkat Dasar bagi Dosen PTN dan PTS di Malang Angkatan XIV, Pusat Penelitian IKIP MALANG, Malang, 12 Juli.

Prawoto. 1988. *Pengaruh Penginformasian Tujuan Pembelajaran dalam Modul terhadap Hasil Belajar Siswa SD PAMONG Kelas Jauh*. Tesis tidak diterbitkan. Malang: FPS IKIP MALANG.

Russel, T. 1993. An Alternative Conception: Representing Representation. Dalam P.J. Black & A. Lucas (Eds.). *Children's Informal Ideas in Science* (hlm. 62-84). London: Routledge.

Santosa, R. Gunawan. 2002. *Aplikasi Teorema Polya Pada Enumerasi Graf sederhana*, (online), (<http://home.unpar.ac.id/integral.pdf.html>, diakses 29 Desember 2006)

Sihombing, U. 2003. *Pendataan Pendidikan Berbasis Masyarakat*. <http://www.puskur.or.id>. Diakses 21 April 2006

Zainuddin, M.H. 1999. Meningkatkan Mutu Profesi Keguruan Indonesia. *Cakrawala Pendidikan*, 1(1):45–52.

6. Naskah diketik dengan memperhatikan aturan tentang penggunaan tanda baca dan ejaan yang dimuat dalam *Pedoman Umum Ejaan Bahasa Indonesia yang Disempurnakan* (Depdikbud, 1987).

# APLIKASI TEOREMA POLYA UNTUK MENGHITUNG BANYAKNYA GRAF SEDERHANA YANG TIDAK ISOMORFIK

**Khomsatun Ni'mah**

Prodi Pendidikan Matematika Universitas Nusantara PGRI Kediri

**Abstrak.** Penulisan ini bertujuan untuk mengetahui aplikasi teorema Polya dalam menghitung banyaknya graf sederhana yang tidak isomorfik. Langkah-langkah yang digunakan dalam penghitungan banyaknya graf sederhana yang tidak isomorfik yaitu: (1) mengidentifikasi banyaknya titik yang akan dihitung, (2) menentukan banyaknya sisi pada graf lengkap dari titik yang akan dihitung, (3) menentukan banyaknya anggota grup simetri pada titik yang akan dihitung, (4) menentukan semua bentuk tipe untai dan banyak anggota dari bentuk tipe untai tersebut, (5) menentukan bentuk indeks sikliknya, (6) menunjukkan keseluruhan perubahan indeks siklik dengan cara mencari pembangkit dari grup  $S_n$  (permutasi titik pada graf) yaitu grup  $R_n$  (permutasi sisi pada graf), (7) dari keseluruhan perubahan indeks siklik, didapatkan indeks siklik grupny, (8) menentukan banyaknya graf yang tidak isomorfik dengan Teorema Polya I, dan (9) menentukan banyaknya graf tidak isomorfik yang memuat sisi dan tidak memuat sisi dengan menggunakan Teorema Polya II.

**Kata kunci:** graf, isomorfik dan Teorema Polya.

**Abstract .** This research aims to determine the application of Polya 's theorem to calculate the number of non- isomorphic simple graphs. The steps used in the calculation of the number of non- isomorphic simple graphs, namely: (1) identify the number of points to be calculated, (2) determine the number of sides on a complete graph of the points that will be calculated, (3) determine the number of members at the point symmetry group to be calculated, (4) determining all forms of type string and many members of the strand type form, (5) determine the shape cyclic index, (6) shows the overall index change by finding generating cyclic group  $S_n$  (the permutation point on the graph) namely the group  $R_n$  (permutations side of the graph), (7) of the overall index change cyclic, cyclic index grup obtained, (8) determines the number of graphs that are not isomorphic with Polya Theorem I, and (9) determine the number of isomorphic graphs not containing the and no side load using Polya TheoremII.

**Keywords :** graph, isomorphic and Polya theorem.

## PENDAHULUAN

Teori graf merupakan teori yang sudah tua usianya dan memiliki banyak terapan sampai saat ini. Teori ini berkembang sangat pesat. Bahkan, dalam perkembangannya dapat disejajarkan dengan

ilmu Aljabar (*abstrak*) yang lebih dahulu berkembang. Graf digunakan untuk mempresentasikan objek-objek diskrit yang digambarkan sebagai titik dan hubungan antara objek-objek tersebut yang dinyatakan sebagai garis. Menurut catatan sejarah, masalah jem-

batan Konigsberg adalah masalah yang pertama kali menggunakan graf (tahun 1736). Aplikasi graf sangatlah luas. Graf dipakai di berbagai disiplin ilmu maupun dalam kehidupan sehari-hari untuk memodelkan suatu persoalan.

Keunikan teori graf adalah kesederhanaan pokok bahasan yang dipelajarinya, karena dapat disajikan sebagai titik (*vertices*) dan sisi (*edge*). Meskipun pokok bahasan dari topik-topik teori graf sangat sederhana tetapi isi didalamnya belumlah tentu sesederhana itu, kerumitan demi kerumitan masalah selalu ada dan bahkan sampai saat ini masih ada masalah yang belum terpecahkan. Secara garis besar ada empat masalah pokok dalam teori graf, yaitu:

1. Masalah *eksistensi*: masalah yang berhubungan dengan pertanyaan, apakah ada suatu graf yang...? Apakah mungkin dibuat atau dibangun suatu ...?
2. Masalah *konstruksi*: masalah yang berhubungan dengan pembentukan atau pengkontruksian atau pengadaan. Jika suatu graf ada, apakah mungkin kita mengkontruksikan? Bagaimana dapat membangunnya?
3. Masalah *enumerasi*: masalah yang berhubungan dengan penghitungan atau pencacahan. Berapa banyak graf seperti itu? Bagaimana cara menghitungnya?
4. Masalah *optimisasi*: masalah yang berhubungan dengan keputusan yang terbaik, terdekat, terkecil atau paling. Jika ada banyak kemungkinan, bagaimana kita mendapatkan yang terbaik? Mana yang paling baik?.

Dalam penulisan ini akan dibahas tentang masalah *enumerasi* yang berhubungan dengan penghitungan banyaknya graf sederhana yang tidak isomorfik satu dengan yang lainnya. Pada dasarnya tulisan ini merupakan penggabungan dua ilmu, yaitu antara bidang Aljabar (*abstrak*) dan bidang teori graf, artinya Aljabar (*abstrak*) melalui Teorema Polya akan digunakan untuk menyelesaikan masalah *enumerasi* graf sederhana.

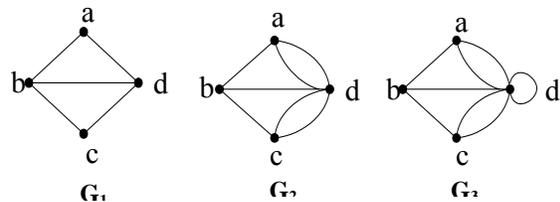
### Graf

Secara matematis, graf  $G$  didefinisikan sebagai pasangan himpunan  $(V,E)$  ditulis dengan notasi  $G = (V,E)$ , yang dalam hal ini  $V$  adalah himpunan tidak kosong dari titik-titik (*vertices atau nodes*) dan  $E$  himpunan sisi (*edges atau arcs*) yang dihubungkan sepasang titik (Munir, 2005: 356).

Dari definisi diatas dijelaskan bahwa  $V$  tidak boleh kosong, sedangkan  $E$  boleh kosong. Jadi, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu pun, tetapi titiknya harus ada minimal satu. Graf yang hanya mempunyai satu titik dan tanpa sisi dinamakan *graf trivial*.

Setiap sisi berhubungan dengan satu atau dua titik. Titik-titik tersebut dinamakan titik ujung. Sisi yang hanya berhubungan dengan satu titik ujung disebut *loop*. Dua sisi berbeda yang menghubungkan titik yang sama disebut garis paralel. Dua titik dikatakan berhubungan (*adjacent*) jika ada sisi yang menghubungkan keduanya. Titik yang tidak mempunyai sisi yang berhubungan dengannya disebut titik terasing (*isolating point*). Graf yang tidak mempunyai titik disebut graf kosong (Siang, 2004:187).

Secara geometris graf digambarkan sebagai sekumpulan titik di dalam bidang dwimatra yang dihubungkan dengan sekumpulan sisi.



Gambar 2.1  
Graf Sederhana (*simple graph*)

Menurut Siang (2004:226), graf sederhana adalah graf yang tidak mempunyai *loop* ataupun garis paralel.  $G_1$  pada gambar 2.1 adalah contoh graf sederhana. Pada graf sederhana, sisi adalah pasangan tak terurut (*unorder pairs*). Jadi menuliskan sisi  $(u,v)$  sama saja dengan  $(v,u)$ . Kita dapat juga mendefinisikan graf sederhana  $G = (V,E)$  terdiri dari himpunan tak kosong titik-titik

dan E adalah himpunan pasangan tak terurut yang berbeda yang disebut sisi.

**Graf Lengkap**

Graf lengkap (*complete graph*) dengan n titik (simbol  $K_n$ ) adalah graf sederhana dengan n titik, dimana setiap 2 titik berbeda dihubungkan dengan suatu sisi (Siang, 2004:196).

**Graf Isomorfisma**

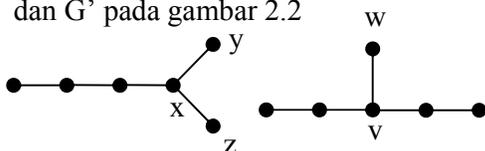
Dalam geometri, dua gambar disebut kongruen jika keduanya mempunyai sifat-sifat geometri yang sama. Dengan cara yang sama, dua graf dikatakan isomorfik jika keduanya menunjukkan “bentuk” yang sama. Kedua graf hanya berbeda dalam hal pemberian label titik dan sisinya saja.

Dua buah graf  $G(E,V)$  dan  $G'(E',V')$ , jika suatu fungsi  $f: V \rightarrow V'$  merupakan fungsi satu-satu atau *one-one onto*, sedemikian sehingga  $(u,v)$  adalah sisi dari G jika dan hanya jika  $(f(u),f(v))$  adalah sisi dari  $G'$ , maka f disebut suatu isomorfisma dari G ke  $G'$ . Apabila terdapat suatu isomorfisma antara G dan  $G'$ , maka G dan  $G'$  disebut dua graf isomorfik (Suryadi, 1996: 21).

Hingga saat ini belum ada teori yang dapat dipakai untuk menentukan apakah dua graf G dan  $G'$  asomorfik. Akan tetapi, jika G dan  $G'$  isomorfik, maka terdapat beberapa hal yang pasti dipenuhi (Siang, 2004:225):

1. jumlah titik pada graf G sama dengan jumlah titik pada graf  $G'$
2. jumlah sisi pada graf G sama dengan jumlah sisi pada graf  $G'$
3. jumlah sisi dengan derajat tertentu dalam graf G dan  $G'$  sama.

Implikasi tersebut tidak berlaku 2 arah. Ada 2 graf yang memenuhi ketiga syarat tersebut, tetapi keduanya tidak isomorfik. Sebagai contoh adalah graf G dan  $G'$  pada gambar 2.2



Gambar 2.2

Dalam G, satu-satunya titik yang berderajat 3 adalah titik x. titik x dihubungkan dengan 2 titik lain yang berderajat 1 (titik y dan z). sebaliknya, dalam graf  $G'$ , satu-satunya titik yang berderajat 3 adalah v. satu-satunya titik berderajat 1 yang dihubungkan dengan v hanyalah titik w, sehingga G tidak mungkin isomorfik dengan  $G'$ .

Meskipun implikasi syarat isomorfik hanya berlaku satu arah, paling tidak kontraposisi dari implikasi tersebut bisa dipakai untuk menentukan bahwa 2 buah graf tidak isomorfik. Jika salah satu dari ketiga syarat tidak terpenuhi, maka graf G dan  $G'$  tidak isomorfik.

**Definisi Grup**

G suatu himpunan yang tidak kosong dengan operasi  $\circ$  pada G. Struktur aljabar  $(G,\circ)$  disebut dengan grup jika dan hanya jika berlaku postulat-postulat berikut:

- (1)  $\forall a,b \in G$ , berlaku  $a \circ b \in G$  (Sifat tertutupan)
- (2)  $\forall a,b,c \in G$ , berlaku  $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$  (Sifat asosiatif)
- (3)  $\forall a \in G, \exists e \in G \ni a \circ e = e \circ a = a$  (Eksistensi identitas)
- (4)  $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G \ni a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$  (Eksistensi invers)

Himpunan H (himpunan bagian dari G), H bukan himpunan kosong dan  $(G,\circ)$  suatu grup. H disebut subgrup (grup bagian) dari  $(G,\circ)$  jika dan hanya jika  $(H,\circ)$  merupakan suatu grup.

**Definisi Koset**

Misalkan H suatu subgrup dari grup G dan a suatu elemen dari G, maka:

- (i)  $Ha = \{ha|h \in H\}$  disebut koset kanan dari H dalam G
- (ii)  $aH = \{ah|h \in H\}$  disebut koset kiri dari H dalam G

**Definisi Order**

Grup G disebut grup berhingga jika memiliki sejumlah berhingga anggota. Ba-

nyaknya anggota dalam grup  $G$  disebut order dari  $G$  dan disimbolkan  $|G|$ .

**Definisi Grup Simetri**

Grup Simetri dari himpunan  $X = \{1,2,3,\dots,n\}$  adalah grup yang elemen-elemennya adalah semua permutasi dari himpunan  $X$ . Notasi grup simetri adalah  $S_n$ . Banyaknya anggota pada grup simetri  $S_n$  adalah sebanyak  $n!$

**Definisi Grup Siklik**

Misalkan  $(G, \circ)$  adalah suatu grup,  $(G, \circ)$  disebut grup siklik bila ada suatu elemen  $a \in G$  sedemikian sehingga setiap elemen  $G$  dapat dinyatakan sebagai hasil operasi  $g$  dengan dirinya sendiri sebanyak  $n$  kali ( $n$  berhingga). Elemen  $g$  yang dihasilkan itu disebut Generator (pembangkit).

**Definisi Orbit**

Diberikan relasi  $\sim, a, b \in X. a \sim b$  jika dan hanya jika  $b = f^n(a)$  untuk suatu  $n \in Z$ . Jika  $f$  adalah permutasi pada himpunan  $X$ . Kelas ekuivalensi pada  $X$  terhadap relasi  $\sim$  disebut orbit dari  $f$ .

**Definisi Cycle (penyaji untai)**

Permutasi  $f \in S_n$  disebut cycle jika  $f$  memiliki sebanyak-banyaknya satu orbit yang berisikan lebih dari satu elemen. Panjang cycle adalah jumlah elemen pada orbit terbesar. Cycle dengan panjang satu, disebut *fixed point*.

Menggunakan notasi cycle untuk menunjukkan bahwa  $f$  adalah cycle (1 2 4 6). Perhatikan bahwa permutasi  $f$  dapat dibangun oleh orbit-orbitnya dimana orbit-orbit itu berwujud cycle.

**Definisi Cycle Type (tipe untai)**

Diberikan penyaji untai dari  $f$  (permutasi suatu himpunan dengan banyak anggotanya  $n$ ) yang memuat sebanyak  $a_1$  untai dengan panjang 1, sebanyak  $a_2$  untai dengan panjang 2, sebanyak  $a_3$  untai

dengan panjang 3, ..., sebanyak  $a_i$  untai dengan panjang  $i$  dan  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , maka tipe untai  $f$  disimbulkan dengan vektor  $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$  dan bobot  $f$  adalah bilang positif  $W = 1^{a_1} 2^{a_2} 3^{a_3} \dots n^{a_n}$ .

**Definisi Cycle Index (indeks siklik)**

Diberikan  $G$  adalah grup permutasi dengan order  $m$  dari suatu himpunan yang banyak anggotanya  $n$  dan  $g \in G$  bertipe untai  $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$ . Indeks siklik  $g$  didefinisikan sebagai:

$Z(g; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \equiv x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} \dots x_n^{a_n}$  dan indeks siklik grup  $G$  didefinisikan sebagai:

$$Z(g; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \equiv \frac{1}{m} \sum_{g \in G} Z(g; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

**Definisi Pewarnaan**

Fungsi  $f$  dari himpunan berhingga  $X$  ke himpunan berhingga  $Y$  disebut pewarnaan  $X$ . Himpunan berhingga  $Y$  disebut warna, sedangkan himpunan semua pewarnaan  $X$  terhadap warna  $Y$  disebut himpunan  $C$ . Dua pewarnaan  $f, g \in C$  disebut *tak dapat dibedakan terhadap grup*  $G$  yang beraksi pada  $X$  jika  $\exists \pi \in G$  sehingga  $f(x) = g(\pi(x))$  untuk  $\forall x \in X$ . Jelas bahwa relasi tak dapat dibedakan merupakan *relasi ekuivalensi* pada himpunan.

**Definisi Pola**

Kelas-kelas kongruensi dalam himpunan  $C$  dengan relasi tak dapat dibedakan disebut *pola-pola* di  $C$  terhadap grup  $G$ .

**Definisi Persediaan Pola**

Fungsi bobot  $w$  memetakan  $Y$  ke himpunan  $r(w(y_1), w(y_2), w(y_3), \dots, w(y_r))$ .

Persediaan pola  $C$  terhadap grup  $G$  adalah : 
$$P(G; w(y_1), w(y_2), w(y_3), \dots, w(y_r)) = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_r} K(n_1, n_2, \dots, n_r) [w(y_1)]^{n_1} [w(y_2)]^{n_2} \dots [w(y_r)]^{n_r}$$

$K(n_1, n_2, n_3 \dots n_r)$  adalah koefisien yang menyatakan banyaknya pewarnaan (banyak pola) yang dapat dibedakan sehingga warna  $w(y_1)$  bersesuaian dengan  $n_1$  anggota,  $w(y_2)$

bersesuaian dengan  $n_2$  anggota, ... dan  $w(y_r)$  bersesuaian dengan  $n_r$  anggota.

**Teorema Lagrange**

Jika  $(G, \circ)$  suatu grup finit dan H sub grup dari G maka order dari H habis dibagi order dari G  $\langle |H| \mid |G| \rangle$

**Teorema Burnside-Frobenius**

Banyaknya kelas kesetaraan akibat penyekatan S oleh relasi kesetaraan yang ditimbulkan oleh suatu grup permutasi  $(G, \circ)$  pada s adalah (Liu, 1995:367-369):

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |\psi(\pi)|$$

**Teorema Permutasi**

Diberikan  $C = \{ f \mid f : X \rightarrow Y \}$  dan X, Y adalah himpunan berhingga; juga diketahui bahwa G adalah grup permutasi yang beraksi pada X. Untuk tiap  $\pi \in G$  didefinisikan pemetaan  $\pi'$  dari C ke C dengan sifat :  $\pi'(f(x)) = f(\pi(x))$  untuk  $\forall x \in X$  dan  $\forall f \in C$ , maka berlakulah bahwa :

- (a)  $\pi'$  adalah permutasi di C.
- (b)  $G' = \{ \pi' : \pi \in G \}$  adalah grup.

**Teorema Pola**

Misalkan G adalah grup permutasi yang beraksi pada himpunan  $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$  dan C adalah himpunan semua fungsi dari X ke  $Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$ .

Jika  $w(y)$  adalah fungsi bobot pada Y, dan didefinisikan  $\omega(f) \in C$  dengan bentuk :

$$\omega(f) = [w(f(x_1))] [w(f(x_2))] \dots [w(f(x_n))]$$

maka :

- (1) Jika  $f, \phi \in C$  mempunyai sifat tak dapat dibedakan terhadap G, maka  $\omega(f) = \omega(\phi)$
- (2) Jika pola-pola yang berbeda di C dinyatakan dengan  $C_1, C_2, C_3, \dots, C_k; \omega(C_i) (i = 1, 2, 3, \dots, k)$

adalah nilai konstan atas  $C_i$ , maka pola persediaan C dapat dinyatakan sebagai:

$$PP(G; w(y_1), w(y_2), w(y_3), \dots, w(y_r)) = \sum_{i=1}^k u(C_i)$$

**Teorema Burnside-Frobenius Dengan Bobot**

Jika  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$  adalah orbit yang berbeda dalam himpunan  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  terhadap permutasi  $G = \{g_1, g_2, g_3, \dots, g_m\}$ , kemudian pada X didefinisikan fungsi bobot  $\omega(x)$  yang merupakan simbol abstrak dengan sifat bila  $x_r$  dan  $x_s$  berada pada orbit yang sama, maka  $\omega(x_r) = \omega(x_s)$  dan terdapatlah

$$\text{fungsi bobot pada G, yaitu: } W(g_i) = \sum_{x \in F(g_i)} \omega(x)$$

**Teorema Polya I:**

Diberikan  $C = \{f \mid f : x \rightarrow y\}$  dengan  $|x| = n \geq 2$  dan  $|y| = r$ . Jika G merupakan grup permutasi yang beraksi pada X dengan indeks siklik  $Z(G; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  maka banyaknya pola di C terhadap G adalah  $Z(G; r, r, r, \dots, r)$  (Santosa, 2002:5-6)

**Teorema Polya II**

Persediaan pola warna,  $PP(G; w(y_1), w(y_2), w(y_3), \dots, w(y_r))$  adalah merupakan indeks siklik dari  $Z(G; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  pada

$$x_i = [w(y_1)]^i + [w(y_2)]^i + [w(y_3)]^i + \dots + [w(y_r)]^i$$

dengan  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  (Santosa, 2002:6-7).

**Aplikasi Teorema Polya Pada Graf Sederhana**

Dalam bagian ini penulis akan membahas uraian secara rinci tentang langkah-langkah penyelesaian penghitungan banyaknya graf sederhana yang tidak isomorfik dengan menggunakan teorema Polya.

Proses penghitungan banyaknya graf sederhana yang tidak isomorfik dengan menggunakan teorema Polya, yaitu:

- 1) mengidentifikasi banyaknya titik yang akan dihitung;

- 2) menentukan banyaknya kemungkinan sisi tak berarah yang ada pada titik yang akan dihitung;
- 3) menentukan banyaknya anggota grup simetri pada titik yang akan dihitung;
- 4) menentukan semua kemungkinan bentuk tipe untai dan banyak anggotanya dari titik tersebut;
- 5) menentukan bentuk indeks sikliknya;
- 6) mencari keseluruhan perubahan indeks sikliknya (pembangkit) dari grup  $S_n$  (permutasi titik pada graf) pada grup  $R_n$  (permutasi sisi pada graf).
- 7) Akan didapatkan indeks siklik grupnya, yaitu:

$$Z(G_{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n}) = \frac{1}{m_{g \in G}} \sum Z(g; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

- 8) Setelah didapatkan indeks siklik grupnya baru diaplikasikan ke dalam teorema Polya I dan teorema Polya II.

**MODEL PENGEMBANGAN**

Metode untuk menghitung kelas-kelas kongruensi dikenal dengan teori *enumerasi*

Burnside-Polya. Metode ini merupakan teknik yang penting, karena dapat digunakan untuk menghitung kelas-kelas isomorfisma graf. Teorema Polya ada dua yaitu Teorema Polya I dan Teorema Polya II.

**HASIL PENELITIAN**

Apabila  $n$  titik pada graf  $G$  dikenai permutasi, maka  $n(n-1)/2$  pasangan titik tak terurut (artinya  $ij = ji$ ) dari himpunan titik tersebut juga mengalami permutasi. Dalam hal ini pasangan titik tak terurut pada suatu himpunan dapat dipandang sebagai sisi, yang ujung-ujungnya adalah pasangan titik tersebut.

Sebagai contoh kongkritnya diberikan himpunan titik  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  yang merupakan himpunan titik suatu graf dengan  $n = 5$ . Seluruh kemungkinan sisi tak berarah yang ada pada 5 titik tersebut adalah  $(5)(5-1)/2 = 10$  sisi.

Jika himpunan permutasi pada titik suatu graf membentuk grup simetri penuh (sebut saja  $S_n$ ), maka permutasi dari pasangan titik itu (sisi) itu juga membentuk grup simetri (sebut  $R_n$ ). jadi grup  $S_n$  (permutasi titik pada graf) akan membangkitkan grup  $R_n$  (permutasi sisi pada graf). Seluruh bentuk grup  $S_5$  ada  $5! = 120$ , yaitu:

$g_1 = (1)(2)(3)(4)(5)$	$g_{31} = (1432)(5)$	$g_{61} = (12)(3)(4)(5)$	$g_{91} = (12)(35)(4)$
$g_2 = (1)(2345)$	$g_{32} = (1)(2)(345)$	$g_{62} = (12)(345)$	$g_{92} = (13)(25)(4)$
$g_3 = (1)(2354)$	$g_{33} = (1)(2)(354)$	$g_{63} = (12)(354)$	$g_{93} = (15)(23)(4)$
$g_4 = (1)(2435)$	$g_{34} = (1)(245)(3)$	$g_{64} = (13)(245)$	$g_{94} = (12)(34)(5)$
$g_5 = (1)(2453)$	$g_{35} = (1)(254)(3)$	$g_{65} = (13)(254)$	$g_{95} = (13)(24)(5)$
$g_6 = (1)(2534)$	$g_{36} = (1)(235)(4)$	$g_{66} = (14)(235)$	$g_{96} = (14)(23)(5)$
$g_7 = (1)(2543)$	$g_{37} = (1)(253)(4)$	$g_{67} = (14)(253)$	$g_{97} = (12345)$
$g_8 = (1345)(2)$	$g_{38} = (1)(234)(5)$	$g_{68} = (15)(234)$	$g_{98} = (12354)$
$g_9 = (1354)(2)$	$g_{39} = (1)(243)(5)$	$g_{69} = (15)(243)$	$g_{99} = (12435)$
$g_{10} = (1435)(2)$	$g_{40} = (145)(2)(3)$	$g_{70} = (145)(23)$	$g_{100} = (12453)$
$g_{11} = (1453)(2)$	$g_{41} = (154)(2)(3)$	$g_{71} = (154)(23)$	$g_{101} = (12534)$
$g_{12} = (1534)(2)$	$g_{42} = (135)(2)(4)$	$g_{72} = (135)(24)$	$g_{102} = (12543)$
$g_{13} = (1543)(2)$	$g_{43} = (153)(2)(4)$	$g_{73} = (153)(24)$	$g_{103} = (13245)$
$g_{14} = (1245)(3)$	$g_{44} = (134)(2)(5)$	$g_{74} = (134)(25)$	$g_{104} = (13254)$
$g_{15} = (1254)(3)$	$g_{45} = (143)(2)(5)$	$g_{75} = (143)(25)$	$g_{105} = (13425)$
$g_{16} = (1425)(3)$	$g_{46} = (125)(3)(4)$	$g_{76} = (125)(34)$	$g_{106} = (13452)$

$g_{17} = (1452)(3)$	$g_{47} = (152)(3)(4)$	$g_{77} = (152)(34)$	$g_{107} = (13524)$
$g_{18} = (1524)(3)$	$g_{48} = (124)(3)(5)$	$g_{78} = (124)(35)$	$g_{108} = (13542)$
$g_{19} = (1542)(3)$	$g_{49} = (142)(3)(5)$	$g_{79} = (142)(35)$	$g_{109} = (14235)$
$g_{20} = (1235)(4)$	$g_{50} = (123)(4)(5)$	$g_{80} = (123)(45)$	$g_{110} = (14253)$
$g_{21} = (1253)(4)$	$g_{51} = (132)(4)(5)$	$g_{81} = (132)(45)$	$g_{111} = (14325)$
$g_{22} = (1325)(4)$	$g_{52} = (1)(2)(3)(45)$	$g_{82} = (1)(23)(45)$	$g_{112} = (14352)$
$g_{23} = (1352)(4)$	$g_{53} = (1)(2)(35)(4)$	$g_{83} = (1)(24)(35)$	$g_{113} = (14523)$
$g_{24} = (1523)(4)$	$g_{54} = (1)(2)(34)(5)$	$g_{84} = (1)(25)(34)$	$g_{114} = (14532)$
$g_{25} = (1532)(4)$	$g_{55} = (1)(25)(3)(4)$	$g_{85} = (13)(2)(45)$	$g_{115} = (15234)$
$g_{26} = (1234)(5)$	$g_{56} = (1)(24)(3)(5)$	$g_{86} = (14)(2)(35)$	$g_{116} = (15243)$
$g_{27} = (1243)(5)$	$g_{57} = (1)(23)(4)(5)$	$g_{87} = (15)(2)(34)$	$g_{117} = (15324)$
$g_{28} = (1324)(5)$	$g_{58} = (15)(2)(3)(4)$	$g_{88} = (12)(3)(45)$	$g_{118} = (15342)$
$g_{29} = (1342)(5)$	$g_{59} = (14)(2)(3)(5)$	$g_{89} = (14)(25)(3)$	$g_{119} = (15423)$
$g_{30} = (1423)(5)$	$g_{60} = (13)(2)(4)(5)$	$g_{90} = (15)(24)(3)$	$g_{120} = (15432)$

Tipe untai dari  $S_5$  ada 7, yaitu:

- Bentuk  $[5, 0, 0, 0, 0]$  ada 1 buah dan indeks sikliknya:  $x_1^5$
- Bentuk  $[1, 0, 0, 1, 0]$  ada 30 buah dan indeks sikliknya:  $x_1x_4$
- Bentuk  $[2, 0, 1, 0, 0]$  ada 20 buah dan indeks sikliknya:  $x_1^2x_3$
- Bentuk  $[3, 1, 0, 0, 0]$  ada 10 buah dan indeks sikliknya:  $x_1^3x_2$
- Bentuk  $[0, 1, 1, 0, 0]$  ada 20 buah dan indeks sikliknya:  $x_2x_3$
- Bentuk  $[1, 2, 0, 0, 0]$  ada 15 buah dan indeks sikliknya:  $x_1x_2^2$
- Bentuk  $[0, 0, 0, 0, 1]$  ada 24 buah dan indeks sikliknya:  $x_5$

Pembangkit dari setiap indeks sikliknya, yaitu:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ akan membangkitkan } a' = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 23 & 24 & 25 & 34 & 35 & 45 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 23 & 24 & 25 & 34 & 35 & 45 \end{pmatrix} \text{ atau } \alpha' = (12)$$

yang bertipe  $x_1^{10}$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ akan membangkitkan } a' = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 23 & 24 & 25 & 34 & 35 & 45 \\ 41 & 42 & 43 & 45 & 12 & 13 & 15 & 23 & 25 & 35 \end{pmatrix} \text{ atau}$$

$$\alpha' = (13\ 42)(24\ 13)(12\ 14\ 34\ 23)(15\ 45\ 35\ 25) \text{ yang bertipe } x_2x_4$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ akan membangkitkan } a' = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 23 & 24 & 25 & 34 & 35 & 45 \\ 31 & 32 & 34 & 35 & 12 & 14 & 15 & 24 & 25 & 45 \end{pmatrix} \text{ atau}$$

$$\alpha' = (45)(12\ 13\ 23)(14\ 34\ 24)(15\ 35\ 25) \text{ yang bertipe } x_1x_3^3$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ akan membangkitkan } a' = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 23 & 24 & 25 & 34 & 35 & 45 \\ 21 & 23 & 24 & 25 & 13 & 14 & 15 & 34 & 35 & 45 \end{pmatrix} \text{ atau}$$

$$\alpha' = (12)(13\ 23)(14\ 24)(1525)(34)(35)(45) \text{ yang bertipe } x_1^4x_2^3$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \text{ akan membangkitkan } a' = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 23 & 24 & 25 & 34 & 35 & 45 \\ 31 & 32 & 35 & 34 & 12 & 15 & 14 & 25 & 24 & 54 \end{pmatrix} \text{ atau}$$

$$\alpha' = (12\ 13\ 23)(14\ 35\ 24\ 15\ 34\ 25)(45) \text{ yang bertipe } x_1 x_3 x_6$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ akan membangkitkan } a' = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 23 & 24 & 25 & 34 & 35 & 45 \\ 43 & 42 & 41 & 45 & 32 & 31 & 35 & 21 & 25 & 15 \end{pmatrix} \text{ atau}$$

$$\alpha' = (12\ 34)(13\ 24)(14)(15\ 45)(23)(25\ 35) \text{ yang bertipe } x_1^2 x_2^4$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ akan membangkitkan } a' = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 23 & 24 & 25 & 34 & 35 & 45 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \end{pmatrix} \text{ atau}$$

$$\alpha' = (12\ 15\ 45\ 34\ 23)(13\ 25\ 14\ 35\ 24) \text{ yang bertipe } x_5^2$$

keseluruhan perubahan indeks siklik dari grup  $S_5$  menjadi  $R_5$ , adalah sebagai berikut:

$x_1^5 \rightarrow x_1^{10}; x_1 x_4 \rightarrow x_2 x_4^2; x_1^2 x_3 \rightarrow x_1 x_3^3; x_1^3 x_2 \rightarrow x_1^4 x_2^3; x_2 x_3 \rightarrow x_1 x_3 x_6; x_1 x_2 \rightarrow x_1^2 x_2^4; x_5 \rightarrow x_5^2$ , sedangkan banyaknya tiap jenis tidak mengalami perubahan. Dari definisi indeks siklik grup maka didapatkan:

$$Z(R_4; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \frac{1}{120} [x_1^{10} + 30x_2 x_4^2 + 20x_1 x_3^3 + 10x_1^4 x_2^3 + 20x_1 x_3 x_6 + 15x_1^2 x_2^4 + 24x_5^2]$$

#### Aplikasi Teorema Polya I:

Ada 2 keadaan untuk himpunan Y, yaitu adanya sisi pada pasangan titik dan tidak adanya sisi pada pasangan titik, sehingga  $r = 2$ . dari persamaan diatas ambilah  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 2$ , maka didapatkan:

$$\begin{aligned} Z(R_5; 2, 2, 2, 2, 2) &= \frac{1}{120} [2^{10} + 30 \cdot 2 \cdot 2^2 + 20 \cdot 2 \cdot 2^3 + 10 \cdot 2^4 \cdot 2^3 + 20 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 15 \cdot 2^2 \cdot 2^4 + 24 \cdot 2^2] \\ &= 34 \end{aligned}$$

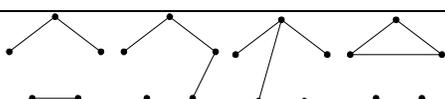
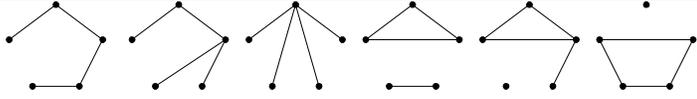
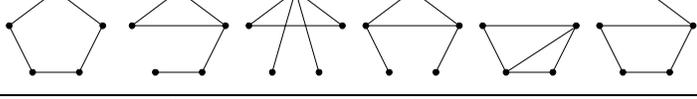
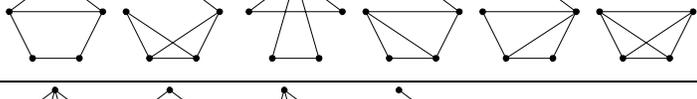
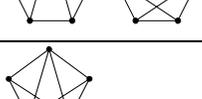
Jadi graf yang memuat 5 titik, maka akan terdapat 34 graf yang tidak isomorfik.

#### Aplikasi teorema polya II:

Ambil dua bobot pada himpunan Y, yaitu  $w(y_1) = \text{tidak ada sisi} = T$  dan  $w(y_2) = \text{ada sisi} = A$ . kemudian substitusikan  $x_1 = T + A$ ,  $x_2 = T^2 + A^2$ ,  $x_3 = T^3 + A^3$ ,  $x_4 = T^4 + A^4$  dan  $x_5 = T^5 + A^5$  pada persamaan diatas, sehingga didapat:

$$\begin{aligned} Z(R_4; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= \frac{1}{120} \left[ \begin{aligned} &(T + A)^{10} + 30(T^2 + A^2)(T^4 + A^4)^2 + 20(T + A)(T^3 + A^3)^3 + \\ &10(T + A)^4(T^2 + A^2)^3 + 20(T + A)(T^3 + A^3)(T^6 + A^6) + \\ &15(T + A)^2(T^2 + A^2)^4 + 24(T^5 + A^5) \end{aligned} \right] \\ &= T^{10} + T^9 A + 2T^8 A^2 + 4T^7 A^3 + 6T^6 A^4 + 6T^5 A^5 + 6T^4 A^6 + 4T^3 A^7 + \\ &2T^2 A^8 + T A^9 + A^{10} \end{aligned}$$

Dengan kata lain untuk graf yang terdiri dari 5 titik maka akan ada sebanyak: 1 graf tanpa garis, 1 graf dengan 1 garis, 2 graf dengan 2 garis, 4 graf dengan 3 garis, 6 graf dengan 4 garis, 6 graf dengan 5 garis, 6 graf dengan 6 garis, 4 graf dengan 7 garis, 2 graf dengan 8 garis, 1 graf dengan 9 garis dan 1 graf dengan 10 garis.

	1
	1
	2
	4
	6
	6
	6
	4
	2
	1
	1

### KESIMPULAN

Dari hasil perhitungan dengan menggunakan teorema polya didapatkan:

- 1) Banyaknya graf yang tidak isomorfik yang dapat dibentuk dari 2 titik ada 2 graf, dari 3 titik ada 4 graf, dari 4 titik ada 11 graf, dari 5 titik ada 34 graf, dari 6 titik ada 156 graf, dari 7 titik ada 1044 graf, dari 8 titik ada 12346 graf, dan dari 9 titik ada 272108.
- 2) Teorema Polya I digunakan untuk menghitung jumlah graf sederhana yang mengandung  $n$  buah titik dan tidak isomorfik antara satu graf dengan graf lainnya.

- 3) Teorema Polya II digunakan untuk menghitung jumlah graf sederhana yang mengandung  $n$  buah titik dan  $k$  buah sisi serta tidak isomorfik antara satu graf dengan graf lainnya.

### DAFTAR RUJUKAN

- Liu, C.L. 1995. *Dasar-Dasar Matematika Diskrit*. Jakarta:Gramedia Pustaka Utama.
- Munir, Rinaldi.2005. *Matematika Diskrit*. Bandung:Informatika.
- Santosa, R. Gunawan. 2002. *Aplikasi Teorema Polya Pada Enumerasi Graf sederhana*,

- (online), (<http://home.unpar.ac.id/integral.pdf.html>, diakses 29 Desember 2006)
- Siang, Jong Jek. 2002. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya Pada Ilmu Komputer*. Yogyakarta: Andi.
- Sukirman. 2005. *Pengantar Aljabar Abstrak*. Malang: UM Press.
- Surahmat. 1993. *Struktur Aljabar*. Malang: FKIP Unisma.
- Suryadi, H.S. 1996. *Teori Graf Dasar*. Jakarta: Gunadarma.
- Sutarno, Heri. 2005. *Matematika Diskrit*. Malang: UM Press.
- Wihikanwijna. 2006. *Brunside Lemma Introduksi Enumerasi*, (online), (<http://himatika.ugm.ac.id/down/kul/brunside.polya.pdf.html>, diakses 19 April 2007)