VOLUME 16, NOMOR 2, OKTOBER 2014 ISSN 1410-9883

CAKRAWALA PENDIDIKAN

FORUM KOMUNIKASI ILMIAH DAN EKSPRESI KREATIF ILMU PENDIDIKAN

ISSN 1410-9883

CAKRAWALA PENDIDIKAN

Forum Komunikasi Ilmiah dan Ekspresi Kreatif Ilmu Pendidikan

Terbit dua kali setahun pada bulan April dan Oktober
Terbit pertama kali April 1999

Alamat Penerbit/Redaksi: STKIP PGRI Blitar, Jalan Kalimantan No. 49 Blitar,Telepon (0342)801493. Langganan 2 nomor setahun Rp 50.000,00 ditambah ongkos kirim Rp 5.000,00. Uang langganan dapat dikirim dengan wesel ke alamat Tata Usaha.

CAKRAWALA PENDIDIKAN diterbitkan oleh Sekolah Tinggi Keguruan dan Ilmu Pendidikan PGRI Blitar. **Ketua:** Dra. Hj. Karyati, M.Si, **Pembantu Ketua:** M. Khafid Irsyadi, ST.,S.Pd

Penyunting menerima sumbangan tulisan yang belum pernah diterbitkan dalam media cetak lain. Syarat-syarat, format, dan aturan tata tulis artikel dapat diperiksa pada *Petunjuk bagi Penulis* di sampul belakang-dalam jurnal ini. Naskah yang masuk ditelaah oleh Penyunting dan Mitra Bestari untuk dinilai kelayakannya. Penyunting melakukan penyuntingan atau perubahan pada tulisan yang dimuat tanpa mengubah maksud isinya.

ISSN 1410-9883

CAKRAWALA PENDIDIKAN

Forum Komunikasi Ilmiah dan Ekspresi Kreatif Ilmu Pendidikan

Volume 16, Nomor 2, Oktoberl 2014

Daftar Isi

Desain sampul: H. Prawoto

Setting dan Cetak: IDC Malang, Telp. 081 136 0709, email: idc.malindo@gmail.com

Petunjuk Penulisan Cakrawala Pendidikan

1. Naskah belum pernah diterbitkan dalam media cetak lain, diketik spasi rangkap pada kertas kuarto, panjang 10–20 halaman, dan diserahkan paling lambat 3 bulan sebelum penerbitan, dalam bentuk ketikan di atas kertas sebanyak 2 eksemplar dan pada disket komputer IBM PC atau kompatibel. Berkas naskah pada disket komputer diketik dengan menggunakan pengolah kata *Microsoft Word*.
2. Artikel yang dimuat dalam jurnal ini meliputi tulisan tentang hasil penelitian, gagasan konseptual, kajian dan aplikasi teori, tinjauan kepustakaan, dan tinjauan buku baru.
3. Semua karangan ditulis dalam bentuk *esai*, disertai judul subbab *(heading)* masing-masing bagian, kecuali bagian pendahuluan yang disajikan tanpa judul subbab. Peringkat judul sub-bab dinyatakan dengan jenis huruf yang berbeda, letaknya rata tepi kiri halaman, dan tidak menggunakan nomor angka, sebagai berikut.

   PERINGKAT 1 (HURUF BESAR SEMUA TEBAL, RATA TEPI KIRI)
   Peringkat 2 (Huruf Besar-kecil Tebal, Rata Tepi Kiri)
   Peringkat 3 (Huruf Besar-kecil Tebal, Miring, Rata Tepi Kiri)

4. Artikel konseptual meliputi (a) judul, (b) nama penulis, (c) abstrak (50–75 kata), (d) kata kunci, (e) identitas peulis (tanpa gelar akademik), (f) pendahuluan (tanpa judul subbab) yang berisi latar belakang dan tujuan atau ruang lingkup tulisan, (g) isi/pembahasan (terbagi atas sub-subjudul), (h) penutup, dan (i) daftar rujukan. Artikel hasil penelitian disajikan dengan sistematika: (a) judul, (b) nama (-nama) peneliti, (c) abstrak, (d) kata kunci, (e) identitas peneliti (tanpa gelar akademik) (f) pendahuluan (tanpa judul subbab) berisi pembahasan kepustakaan dan tujuan penelitian, (g) metode, (h) hasil, (i) pembahasan, (j) kesimpulan dan saran, dan (k) daftar rujukan.
5. Daftar rujukan disajikan mengikuti tatacara seperti contoh berikut dan diurutkan secara alfabetis dan kronologis.

Anderson, D.W., Vault, V.D., dan Dickson, C.E. 1993. *Problems and Prospects for the Decades Ahead: Competency Based Teacher Education*. Berkeley: McCutchan Publishing Co.

Huda, N. 1991. *Penulisan Laporan Penelitian untuk Jurnal*. Makalah disajikan dalam Lokakarya Penelitian Tingkat Dasar bagi Dosen PTN dan PTS di Malang Angkatan XIV, Pusat Penelitian IKIP MALANG, Malang, 12 Juli.

Prawoto. 1988. *Pengaruh Penginformasian Tujuan Pembelajaran dalam Modul terhadap Hasil Belajar Siswa SD PAMONG Kelas Jauh*. Tesis tidak diterbitkan. Malang: FPS IKIP MALANG..

Russel, T. 1993. An Alternative Conception: Representing Representation. Dalam P.J. Black & A. Lucas (Eds.). *Children's Informal Ideas in Science* (hlm. 62-84). London: Routledge.

Santosa, R. Gunawan. 2002. *Aplikasi Teorema Polya Pada Enumerasi Graf sederhana*, (online), (http://home.unpar.ac.id/integral.pdf.html, diakses 29 Desember 2006)

Sihombing, U. 2003. *Pendataan Pendidikan Berbasis Masyarakat*. http://www.puskur.or.id. Diakses 21 April 2006

Zainuddin, M.H. 1999. Meningkatkan Mutu Profesi Keguruan Indonesia. *Cakrawala Pendidikan*, 1(1):45–52.

6. Naskah diketik dengan memperhatikan aturan tentang penggunaan tanda baca dan ejaan yang dimuat dalam *Pedoman Umum Ejaan Bahasa Indonesia yang Disempurnakan* (Depdikbud, 1987).

KETAKSAMAN PADA RUANG QUASI BANACH

Abdulloh Jaelani
abdjae@fst.unair.ac.id
Jurusan Matematika UNAIR Surabaya

Abstrak: Ruang quasi Banach merupakan ruang yang terdefinisi pada quasi norm dan lengkap. Dalam tulisan ini akan ditunjukkan ketaksamaan Young, ketaksamaan Young modifikasi, ketaksamaan Holder, ketaksamaan Minko-wski serta ketaksamaan modifkasi segitiga dari ruang quasi Banach.

Kata kunci : Ketaksamaan, ruang quasi Banach.

PENDAHULUAN

Banyak sekali topik yang dapat dipelajari dalam analisis fungsional, semuanya mengacu pada ruang yang digunakan misalnya: ruang norm, ruang Banach, ruang Hilbert, ruang quasi Banach dan lain-lain.

Konsep ruang norm pertama kali dikemukakan oleh S. Banach, H. Hahn, dan N. Wiener pada tahun 1922. Teorinya kemudian dikembangkan oleh S. Banach pada tahun 1932. Ruang norm adalah ruang yang dibangun dari ruang vektor dengan didefinisikan norm di dalamnya. Sedangkan ruang Banach adalah ruang norm yang lengkap. Ketaksamaan merupakan salah satu dasar untuk mempelajari suatu topik lebih lanjut seperti kekonvergenan, keterbatasan barisan ataupun operator dan fungsional. Salah satunya adalah pada tahun 1984 N.J Kalton mempelajari Plurisubharmonic Functions on Quasi-Banach Spaces. Selanjutnya pada tahun 2007 Cong Wu and Yongjin Li menunjukkan ketaksamaan segitiga pada ruang quasi Banach.

Dalam kajian ini akan ditunjukkan ketaksaman pada ruang quasi Banach.

PEMBAHASAN

Definisi 1 (Cong Wu, 2008)

Misalkan X ruang vektor atas field F. Quasi Norm $\|\,.\,\|$ adalah suatu fungsi dari X yang dipetakan ke bilangan real positif ($\|\,.\,\|$: X $\rightarrow$ R^+), yang memenuhi sifat untuk setiap x, y $\in$ X dan $\alpha \in$ F berlaku :

(QN1) $\|x\| > 0$ untuk $x \neq 0$
(QN2) $\|\alpha\, x\| = |\alpha|\,\|x\|$ untuk $\alpha \in$ F, $x \in$ X
(QN3) $\|x + y\| \leq C(\|x\| + \|y\|)$ untuk x, y $\in$ X, dimana C konstanta yang tak tergantung pada x, y.

Definisi 2 (Cong wu, 2008)

Jika $\|\,.\,\|$ suatu quasi norm pada X terdefinisi pada metrik topologi lengkap, maka X di sebut Ruang Quasi Banach.

Definisi 3 (Jain dan Gupta, 1986)
Diberikan E = [a,b]. Jika f fungsi terukur di E, maka $|f|^p$ juga terukur untuk setiap

$$0 < p < \infty \quad L^p(E) = \left\{ f : \int_E |f|^p < \infty \right\} \qquad (1)$$

Berikut diberikan Teorema tentang kesamaan yang berlaku di ruang quasi Banach khususnya pada $L^2(E)$. Dapat ditunjukkan bahwa $L^2(E)$ dengan $E = [a,b]$ merupakan ruang quasi norm dengan

$$\|x\| = \left\{ \int_E |x(t)|^2 \, dt \right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (2)$$

$L^2(E)$ juga merupakan ruang quasi Banach.

Misalkan $L^2(E)$ ruang quasi Banach akan diselidiki beberapa sifat ketaksamaan yang berlaku di ruang quasi Banach.

Pada ruang quasi Banach berlaku ketaksamaan Young dan ketaksamaan Young modifikasi sebagai berikut :

Teorema 1 (Ketaksamaan Young)
Jika $a,b \in$ R dengan $a,b \geq 0$, $\varepsilon > 0$ dan $1 < p, q < \infty$ sehingga $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$\text{maka } ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad (3)$$

Bukti :
Untuk sembarang $0 \leq b \in$ R didefinisikan f: $[0,\infty) \to$ R dengan fungsi
f(x) = $\frac{x^p}{p} + \frac{b^q}{q} - xb$, dan dapat ditunjukkan bahwa f'(x) = 0 jika dan hanya jika
$x_0 = b^{\frac{1}{p-1}}$. Lebih lanjut dapat dperoleh juga f'(x) < 0 untuk $\forall$x $\in (0, x_0)$ dan f'(x) > 0 untuk $\forall$x $\in (x_0,\infty)$.

f'(x_0) = 0, untuk $x_0 = b^{\frac{1}{p-1}}$, oleh karena itu 0 $\leq \frac{x^p}{p} + \frac{b^q}{q} - xb$, untuk $\forall$x ≥ 0 dan (3) dipenuhi untuk $\forall a \geq 0$

■

Teorema 2 (Ketaksamaan Young Modifikasi)
Jika $a,b \in$ R dengan $a,b \geq 0$, $\varepsilon > 0$ dan 1 $< p, q < \infty$ sehingga $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$\text{maka } ab \leq \varepsilon \frac{a^p}{p} + \varepsilon^{1-q} \frac{b^q}{q} \qquad (4)$$

Teorema 3 (Holder Inequality)
Diberikan E $\subset$ R dan $1 \leq p, q < \infty$ sehingga $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
Jika x $\in L^p(E)$ dan y $\in L^q(E)$, maka

$$\int_E |x(t)\, y(t)| dt \leq \|x\|_p \|y\|_q \qquad (5)$$

Bukti :
Jika p =1, q = 1 maka ketaksamaannya di penuhi. Dengan menggunakan ketaksamaan Young modifikasi diperoleh

$$\int x(t)\, y(t)\, dt \leq \int_E \varepsilon \frac{|x(t)|^p}{p} + \varepsilon^{1-q} \frac{|y(t)|^q}{q}$$

$$= \frac{\varepsilon}{p} \|x\|_p^p + \frac{\varepsilon^{1-q}}{q} \|y\|_q^q, \ \varepsilon > 0.$$

Fungsi

f(ε) $= \frac{\varepsilon}{p} \|x\|_p^p + \frac{\varepsilon^{1-q}}{q} \|y\|_q^q$ minimum pada

$$\varepsilon_0 = \frac{\|x\|_q}{\|y\|_p^{p-1}} + \frac{\varepsilon^{1-q}}{q} |y|_q^q$$

Sehingga diperoleh

$$\int_E x(t) y(t) dt$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{p} \|x\|_p^p + \frac{\varepsilon_0^{1-q}}{q} \|y\|_q^q$$

$$= \frac{1}{p} \|x\|_p \|y\|_q + \frac{1}{q} \|x\|_p \|y\|_q = \|x\|_p \|y\|_q$$

Teorema 4 (Minkowski Inequality)
Jika E $\subset$ R dan p = 2, maka

$$\|x + y\|^2 \leq C(\|x\| + \|y\|)^2, \forall x,y \in L^2(E) \qquad (6)$$

Bukti :

$$\|x + y\|^2 = \int_E |x(t) + y(t)|^2 dt$$

$$\leq \int_E |x(t) + y(t)|^{2-1} |x(t)| \, dt +$$

$$\int_E |x(t) + y(t)|^{2-1} |y(t)| \, dt$$

$$\le \left[\int_E |x(t)+y(t)|^{(2-1)} dt \right] (\|x\|+\|y\|)$$
$$= \|x+y\|^{2-1} (\|x\|+\|y\|)$$
$$\le C^{2-1} (\|x\|+\|y\|)^{2-1} (\|x\|+\|y\|)$$
$$= C (\|x\|+\|y\|)^2 \quad \blacksquare$$

Teorema 5
Jika setiap elemen tak kosong x, y di ruang quasi Banach $L^2(E)$ dengan $\|x\| \ge \|y\|$, maka berlaku

$$\|x+y\| + C\left(2 - \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\|\right) \|y\| \le C\|x\| + \|y\| \quad (7)$$
$$\le \|x+y\| + \left(2C^2 - \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\|\right) \|x\| \quad (8)$$

Bukti :
Misalkan $\|x\| \ge \|y\|$, akan ditunjukkan ketidaksamaan (7)

$$\|x+y\| = \left\| \|y\| \left(\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right) + \|x\| \frac{x}{\|x\|} - \|y\| \frac{y}{\|x\|} \right\|$$
$$\le C \left\| \|y\| \left(\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right) \right\| + C \left\| \|x\| \frac{x}{\|x\|} - \|y\| \frac{y}{\|x\|} \right\|$$

$$\le C\|y\| \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| + C (\|x\| - \|y\|)$$
$$\le C\|y\| \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} - 2 \right\| + C (\|x\| + \|y\|)$$
$$\|x+y\| + C\left(2 - \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\|\right) \|y\| \le C (\|x\| + \|y\|) \quad \blacksquare$$

Misalkan $\|x\| \ge \|y\|$, akan ditunjukkan ketidaksamaan (8)

$$\|x+y\| = \left\| \|x\| \left(\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right) - \left(\|x\| \frac{y}{\|y\|} - \|y\| \frac{y}{\|y\|} \right) \right\|$$
$$\ge \frac{1}{C} \left\| \|x\| \left(\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right) \right\| - \left\| \|x\| \frac{x}{\|x\|} - \|y\| \frac{x}{\|x\|} \right\|$$

$$= \frac{1}{C} \|x\| \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| - (\|x\| - \|y\|)$$
$$= \|x\| \left(\frac{1}{C} \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| - 2 \right) + (\|x\| + \|y\|)$$
$$C (\|x\| + \|y\|) \le C \|x+y\| + \left(2C - \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| \right) \|x\|$$
$$\le \|x+y\| + (C-1) C (\|x\| + \|y\|) + \left(2C - \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| \right) \|x\|$$

$$= \|x+y\| + \left(2C^2 - \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| \right) \|x\| \quad \blacksquare$$

L(X,Y) merupakan himpunan operator linier terbatas dengan norm $\|F\| = \sup_{x \ne 0} \left\{ \frac{\|Fx\|_Y}{\|x\|_X} \right\}$. Akan ditunjukkan bahwa jika X ruang quasi norm dan Y ruang quasi Banach maka L(X,Y) suatu ruang quasi Banach seperti yang tertuang pada Teorema berikut

Teorema 6
Misalkan X ruang norm dan Y ruang quasi Banach maka L(X,Y) ruang quasi Banach
Bukti :
Jelas bahwa L(X,Y) ruang linier
Akan ditunjukkan bahwa L(X,Y) ruang quasi norm terhadap norm

$$\|F\| = \sup_{x \ne 0} \left\{ \frac{\|Fx\|_Y}{\|x\|_X} \right\} = \sup_{\|x\|=1} \{ \|Fx\|_Y \}$$

Untuk setiap F, G $\in$ L(X,Y) dan $\alpha \in$ F maka berlaku :

$\|F\| = \sup_{x \ne 0} \left\{ \frac{\|Fx\|_Y}{\|x\|_X} \right\} = \sup_{\|x\|=1} \{ \|Fx\|_Y \} > 0$, untuk x $\ne 0$

$$\|\alpha F\| = \sup_{\|x\|=1} \|\alpha Fx\|$$
$$= \sup_{\|x\|=1} \|\alpha Fx\|$$
$$= |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|Fx\| = |\alpha| \, \|F\|$$

$$\|F+G\| = \sup_{\|x\|=1} \|(F+G)x\|$$

$$\leq C\left(\sup_{\|x\|=1}\|Fx\| + \sup_{\|x\|=1}\|Gx\|\right)$$

$$= C\left(\|F\|+\|G\|\right),\ \forall F, G \in L(X,Y)$$

dan $C \in F$.

Selanjutnya akan ditunjukan bahwa L(X,Y) lengkap

Misalkan $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ barisan Cauchy di L(X,Y) dan $x \neq 0 \in X$ berarti, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_o \in N$ sehingga $\|F_m - F_n\| \leq \dfrac{\varepsilon}{\|x\|_X}, \forall n, m \geq n_0$,

sehingga diperoleh

$$\|F_m x - F_n x\|_Y \leq \|F_m - F_n\|\|x\|_X \leq \varepsilon, \forall n, m \geq n_0$$

Karena $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ barisan Cauchy, Y ruang quasi Banach, maka barisan ini konvergen ke suatu elemen di Y, katakanlah ke F. Jadi $Fx = \lim_{n\to\infty} F_n x, \forall x \in X$. F linier dan $\|F\| < \infty$.

Kemudian akan ditunjukkan bahwa $F \in L(X,Y)$. Misalkan diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, ada $n_1 \in N$ sedemikian hingga $\|F_m - F_n\| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}, \forall n, m \geq n_1$. Untuk $x \in X$ diperoleh

$$\|F_m x - F_n x\|_Y \leq \|F_m - F_n\|\|x\|_X \leq \frac{\varepsilon\|x\|_X}{2}, \forall n, m \geq n_1$$

dan

$$\|Fx - F_n x\|_Y = \left\|\lim_{m\to\infty} F_m x - F_n x\right\|_Y$$

$$\leq \lim_{m\to\infty}\|F_m x - F_n x\|_Y \leq \frac{\varepsilon\|x\|_X}{2}, \forall n \geq n_1$$

Sehingga

$$\|Fx\|_Y = \|F_n x + Fx - F_n x\|_Y$$

$$\leq C\left(\|F_n x\|_Y + \|Fx - F_n x\|_Y\right)$$

$$\leq C\left(\|F_n\|\|x\|_X + \|F - F_n\|\|x\|_X\right)$$

$$\leq C\left(\|F_n\|\|x\|_X + \frac{\varepsilon\|x\|_X}{2}\right)$$

$$\leq C\left[\left(\|F_n\| + \frac{\varepsilon}{2}\right)\|x\|_X\right]$$

Karena $\|F - F_n\| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq n_1$ disimpulkan bahwa $F_n \to F$ di L(X,Y) untuk $n \to \infty$. Dengan kata lain F operator linier terbatas atau $F \in L(X,Y)$. ■

PENUTUP

Berdasarkan pada hasil pembahasan, dapat disimpulkan bahwa:

1. Ketaksamaan Young, ketaksamaan Young Modifikasi, dan ketaksamaan Holder pada ruang quasi Banach berbentuk seperti pada ruang Banach.
2. Ketaksamaan Minkowski pada quasi Banach adalah $\|x+y\|^2 \leq C\left(\|x\|+\|y\|\right)^2$.
3. Modifikasi ketaksamaan Segitiga pada ruang quasi Banach adalah sebagai berikut :

$$\|x+y\| + C\left(2 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|\right)\|y\| \leq C\|x\| + \|y\|$$

$$\|x+y\| + C\left(2 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|\right)\|y\| \leq$$

$$\|x+y\| + \left(2C^2 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|\right)\|x\|$$

DAFTAR RUJUKAN

Jain P.K. and Gupta V.P. (1986). *Lebesgue Measure and Integration*. Wiley Eastern Limited

Kreyszig, Erwin. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons. New York

Giles, John R. (1987). *Introductory to the Analysis of Metric Space*. Cambridge University Press. Australia

Solin, Pavel (2006). *Partial Differential Equations and the Finite Element Methot*. John Wiley & Sons. New York

Cong Wu and Yong Jin Li, (2008). *On the triangle inequality in Quasi Banach Spaces*. Journal of inequalities in pure and applied mathematics. Vol 9, issu 2, art. 41 http://www.emis.de/journals/JIPAM/images/157_07_JIPAM/157_07.pdf