VOLUME 26, NOMOR 2, OKTOBER 2022 ISSN 1410-9883

CAKRAWALA PENDIDIKAN

FORUM KOMUNIKASI ILMIAH DAN EKSPRESI KREATIF ILMU PENDIDIKAN

Terbit 31 Oktober 2022

ISSN 1410-9883

CAKRAWALA PENDIDIKAN
Forum Komunikasi Ilmiah dan Ekspresi Kreatif Ilmu Pendidikan

Terbit dua kali setahun pada bulan April dan Oktober
Terbit pertama kali April 1999

Alamat Penerbit/Redaksi: Universitas PGRI Adi Buana Kampus Blitar: Jl. Kalimantan No. 111 Blitar, Telp. (0342) 801493. Langganan 2 Nomor setahun Rp. 200.000,00 ditambah ongkos kirim Rp. 50.000,00.

CAKRAWALA PENDIDIKAN diterbitkan oleh Universitas PGRI Adi Buana Kampus Blitar. **Direktur Operasional**: Dra. Riki Suliana RS., M.Pd.

Penyunting menerima artikel yang belum pernah diterbitkan di media cetak yang lainnya. Syarat-syarat, format dan aturan tata tulis artikel dapat diperiksa pada *Petunjuk bagi Penulis* di sampul belakang dalam jurnal ini. Artikel yang masuk akan ditelaah oleh Tim Penyunting dan Mitra Bestari untuk dinilai kelayakannya. Tim akan melakukan perubahan tata letak dan tata bahasa yang diperlukan tanpa mengubah maksud dan isinya.

Petunjuk Penulisan Cakrawala Pendidikan

1. Artikel belum pernah diterbitkan di media cetak yang lainnya.
2. Artikel diketik dengan memperhatikan aturan tentang penggunaan tanda baca dan ejaan yang baik dan benar sesuai *Pedoman Umum Ejaan Bahasa Indonesia yang Disempurnakan (Depdikbud, 1987)*
3. Pengetikan Artikel dalam format Microsoft Word, ukuran kertas A4, spasi 1.5, jenis huruf *Times New Roman*; ukuran huruf 12. Dengan jumlah halaman; 10 – 20 halaman.
4. Artikel yang dimuat dalam Jurnal ini meliputi tulisan tentang hasil penelitian, gagasan konseptual, kajian dan aplikasi teori, tinjauan kepustakaan, dan tinjauan buku baru.
5. Artikel ditulis dalam bentuk esai, disertai judul sub bab (heading) masing-masing bagian, kecuali bagian pendahuluan yang disajikan tanpa judul sub bab. Peringkat judul sub bab dinyatakan dengan jenis huruf yang berbeda, letaknya rata tepi kiri halaman, dan tidak menggunakan nomor angka, sebagai berikut:

   PERINGKAT 1 (HURUF BESAR SEMUA TEBAL, RATA TEPI KIRI)
   Peringkat 2 (Huruf Besar-kecil Tebal, Rata Tepi Kiri)
   Peringkat 3 (*Huruf Besar-kecil Tebal, Miring, Rata Tepi Kiri*)

6. Artikel konseptual meliputi; (a) judul, (b) nama penulis, (c) abstrak dalam bahasa Indonesia dan Inggris (maksimal 200 kata), (d) kata kunci, (e) identitas penulis (tanpa gelar akademik), (f) pendahuluan yang berisi latar belakang dan tujuan atau ruang lingkup tulisan, (g) isi/pembahasan (terbagi atas sub-sub judul), (h) penutup, dan (i) daftar rujukan. Artikel hasil penelitian disajikan dengan sistematika: (a) judul, (b) nama-nama peneliti, (c) abstrak dalam bahasa Indonesia dan Inggris (maksimal 200 kata), (d) kata kunci, (e) identitas penulis (tanpa gelar akademik), (f) pendahuluan yang berisi pembahasan kepustakaan dan tujuan penelitian, (g) metode, (h) hasil, (i) pembahasan (j) kesimpulan dan saran, dan (k) daftar rujukan.
7. Daftar rujukan disajikan mengikuti tata cara seperti contoh berikut dan diurutkan secara alfabetis dan kronologis.

   Anderson, D.W., Vault, V.D., dan Dickson, C.E. 1993. *Problem and Prospects for the Decades*
   Ahead: Competency Based Teacher Education. Barkeley: McCutchan Publishing Co.
   Huda, N. 1991. *Penulisan Laporan Penelitian untuk Jurnal.* Makalah disajikan dalam Loka
   Karya Penelitian Tingkat Dasar bagi Dosen PTN dan PTS di Malang Angkatan XIV, Pusat Penelitian IKIP MALANG, Malang, 12 Juli.
   Prawoto, 1998. *Pengaruh Pengirformasian Tujuan Pembelajaran dalam Modul terhadap Hasil*
   Belajar Siswa SD PAMONG Kelas Jauh. Tesis tidak diterbitkan. Malang: FPS IKIP MALANG.
   Russel, T. 1993. An Alternative Conception: Representing Representation. Dalam P.J. Nlack & A. Lucas (Eds.) *Children's Informal Ideas in Science* (hlm. 62-84). London:Routledge.
   Sihombing, U. 2003. *Pendataan Pendidikan Berbasis Masyarakat.* http://www.puskur.or.id.Diakses pada 21 April 2006.
   Zainuddin, M.H. 1999. Meningkatkan Mutu Profesi Keguruan Indonesia. *Cakrawala Pendidikan.* 1 (1):45-52.

8. Pengiriman Artikel via email ke hudaferi@gmail.com paling lambat 3 bulan sebelum bulan penerbitan.

CAKRAWALA PENDIDIKAN

Forum Komunikasi Ilmiah dan Ekspresi Kreatif Ilmu Pendidikan

Volume 26, Nomor 2, Oktober 2022

Daftar Isi

PENYELESAIAN RELASI REKURSIF

Fitria Yunaini
juneef.10@gmail.com
Universitas PGRI Adi Buana Kampus Blitar

Abstrak: Masalah yang diangkat dalam penelitian ini adalah bagaimana menyelesaikan relasi rekursif dengan menggunakn cara iterasi, dengan persamaan kaarkterikstik, dan dengan fungsi pembangkit. Sedangkan tujuan penelitan ini adalah mengetahui tahapan-tahapan dalam menyelesaiakan relasi Rekursif dengan cara Iterasi, melalui Persamaan Karakteristik dan dengan Fungsi Pembangkit. Kemudian permasalahan yang dikaji dibatasi pada barisan bilangan real dan relasi rekursif. Dalam menyelesaikan relasi rekursif perlu diketahui definisi-definisi diantaranya adalah definisi Barisan bilangan Real (Barisan di R) yaitu suatu fungsi dengan domain himpunan bilangan asli N ke himpunan bilangan real R yang dinotasikan dengan $f: N \to R$. Selain definisi barisan bilangan real juga definisi relasi rekursif yaitu persamaan yang menyatakan hubungan antara beberapa suku. Dalam penelitian ini, mengkaji barisan bilangan real yang terdiri dari limit barisan, barisan terbatas, barisan monoton, dan barisan divergen dengan pembahasan yang dapat memenuhi contoh-contoh dari relasi rekursif yang dilakukan dengan beberapa tahap tersebut. Dan telah dikaji pula tentang materi relasi rekursif sehinga pada pembahasan dapat mempermudah dalam menyelesaikan relasi rekursif dengan beberapa tahapan tersebut. Berdasarkan hasil pembahasan dapat diperoleh bahwa menyelesikan relasi rekursif dengan cara iterasi, persamaan karakteristik dan dengan fungsi pembangkit dapat menghasilkan solusi homogen atau solusi umum. Dari solusi umum tersebut sebenarnya bisa menentukan nilai-nilai yang diperoleh dengan cara memasukkan nilai variabel dan koefisiennya.

Kata kunci: barisan , relasi rekursif

Abstract: The problem raised in this research is how to solve recursive relations using iteration method, with characteristic equations, and with generating functions. While the purpose of this research is to know the stages in solving recursive relations by means of iteration, through characteristic equations and by generating functions. Then the problems studied are limited to real number sequences and recursive relations. In solving recursive relations, it is necessary to know the definitions, including the definition of the Sequence of Real numbers (Sequence in R), which is a function with the domain of the set of natural numbers N to the set of real numbers R which is denoted by f: N → R. In addition to the definition of the sequence of real numbers, there is also the definition Recursive relations are equations that express the relationship between several terms. In this research, examines sequences of real numbers consisting of limit sequences, finite sequences, monotone sequences, and diverging sequences with discussions that can fulfill examples of recursive relations carried out with these several steps. And the material on recursive relations has also been studied so that the discussion can make it easier to solve recursive relations with these several stages. Based on the results of the discussion, it can be obtained that solving recursive relations by means of iteration, characteristic equations and generating functions can produce homogeneous solutions or general solutions. From this general solution, it is actually possible to determine the values obtained by entering the variable values and their coefficients.

Keywords: sequence, recursive relation

PENDAHULUAN

Dari segi wilayah kajian, matematika berawal dari ruang lingkup yang sederhana, yang hanya menelaah tentang barisan bilangan dan ruang, namun sekarang matematika sudah berkembang dengan menelaah hal-hal yang membutuhkan daya pikir dan imajinasi tingkat tinggi (Abdusysyakir, 2007:6).

Limit merupakan konsep matematika yang membahas masalah pendekatan nilai, konsep konvergen dan divergen sebagai suatu analisis diperkenalkan melalui dan barisan. Barisan bilangan real adalah suatu fungsi dari himpunan bilangan asli N ke himpunan bilangan real. (Bartle dan Sherbert, 1994:67). Agar suatu barisn menjadi konvergen, maka nilai-nilai yang diperoleh harus mendekati nilai puncaknya, tetapi tidak harus mendekati, nilai – nilai tersebut harus tetap berdekatan. Berdekatan artinya semakin lama semakin dekat. Jika semakin lama semakin menjauh dari nilai puncaknya maka barisan tersebut dikatakan divergen. (Purcell, 2003:3).

Dalam teori Bilangan dikenal macam-macam barisan salah satu di antaranya adalah barisan aritmatika yang berbentuk:

$$f(n) = af(n-1) + bf(n-2), \ \forall n \geq 2$$

dengan *a* dan *b* adalah bilangan real yang ditentukan untuk *f*(*n*). Barisan ini didefinisikan secara rekursif sehingga nilai – nilai dari suku berikutnya dapat diketahui. (Ivan Niven, 1991:199).

Relasi rekursif adalah suatu topik penting dan menarik dalam kombinatorik. Banyak permasalahan dalam matematika, khususnya kombinatorik dapat dimodelkan ke dalam bentuk relasi rekusrsif. Sutu barisan didefinisikan secara rekursif jika kondisi awal barisan ditentukan, dan suku-suku barisan selanjutnya dinyatakan dalam hubungannya dengan sejumlah suku-suku yang sudah dinyatakan sebelumnya.

Definisi 1

Misal $k \notin n$, adalah relasi rekursiif linear dengan koefisisen konstanta order k dapat ditulis dalam bentuk $c_0(n)a_n + c_1(n)a_{n-1} + ... + c_k(n)a_{n-k} = f(n)$ dengan $c_0, c_1, c_2, ..., c_k$ adalah konstanta dan $f(n)$ adalah suatu fungsi dalam n $c_k(n) \neq 0$. Jika persamaan maka disebut relasi linear homogen order *k* dan jika $f(n) \neq 0$ disebut relasi rekursif tak homogen order k. (Sutarno, 2005:50)

Teorema 2

Misal $c_1, c_2 \in R$ dan jika diberikan (p_n) dan (q_n) dua solusi dari persamaan

$c_0(n)a_n + c_1(n)a_{n-1} + ... + c_k(n)a_{n-k} = 0$

, $\forall A, B \in R$

maka

$S_n = A(p_n + p_{n-1} + p_{n-2} + ... + p_{n-k}) + B(q_n + q_{n-1} + q_{n-2} + ... + q_{n-k})$

, $\forall n \in N$ juga merupakan solusi dari

$c_0(n)a_n + c_1(n)a_{n-1} + ... + c_k(n)a_{n-k} = 0$

. (Sutarno, 2005:50)

Berangkat dari latar belakang tersebut banyak kemungkinan-kemungkinan kasus yang bisa terjadi dari bentuk barisan yang diberikan dengan *f*(*n*) yang berbeda serta kondisi awal yang diberikan juga berbeda sehingga penulis tertarik untuk melakukan penelitian dengan judul "Penyelesaian Relasi Rekursif". Maka yang pokok dalam pembahasan ini adalah "Bagaimana menyelesiakan relasi rekursif dengan cara iterasi, melalui Persamaan karakteristik dan dengan Fungsi Pembangkit".

METODE PENULISAN

Dalam hal ini penulis menggunakan metode penulisan kepustakaan atau penelitian literatur yaitu penelitian yang dilakukan dengan cara mengupulkan data dan informasi dengan bantuan bermacam-macam material yang terdapat di dalam perpustakaan, seperti buku-buku, artikel, dokumen-dokumen, catatan dan kisah-kisah sejarah (Mardalis, 1995:28). Dari masing – masing literatur dipilah menurut kategori tertentu dan dipilih yang sesuai dengan permasalahan yang diangkat.

PEMBAHASAN

1. Penyelesaian Relasi Rekursif dengan Iterasi

Penyelesaian relasi rekursif dengan iterasi merupakan metode yang sangat mendasar. Prinsipnya adalah sebagai berikut:

a. Menghitung suku-suku barisan secara berurutan terus menerus hingga kita memperoleh pola tertentu
b. Kemudian, berdasarkan pola tersebut rumus eksplisit dibuat.
c. Untuk mendapat pola-pola suku tersebut, barisan dapat dihitung secara menaik (dihitung berturut-turut $a_0, a_1, a_2, ...$) atau menurun (dihitung berturut-turut $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ...$) .

Contoh 1

Misalkan $a_0, a_1, a_2, ...$ adalah barisn yang didefinisikan secara rekursif sebagai berikut:

$a_k = a_{k-1} + 4$ dengan kondisi awal $a_0 = 1$

Carilah rumus eksplisit barisan tersebut dengan menggunakan metode iterasi.

Penyelesaian:

Metode iterasi akan diselesaikan secara menurun dan secara menaik.

$$
\begin{aligned}
a_k &= a_{k-1} + 4 \\
&= (a_{k-2} + 4) + 4 = a_{k-2} + 2.4 \\
&= (a_{k-3} + 4) + 2.4 = a_{k-3} + 3.4 \\
&= (a_{k-4} + 4) + 3.4 = a_{k-4} + 4.4 \\
&= (a_{k-5} + 4) + 4.4 = a_{k-5} + 5.4
\end{aligned}
$$

Berdasarkan pola yang ada, terlihat bahwa:

$$a_k = (a_{k-k} + k.4) = a_0 + k.4$$

Karena $a_0 = 1$ maka penyelesaian persamaan rekursif adalah

$$a_k = 1 + k.4$$

Jika diselesaikan dengan cara menaik:

$$a_k = 1 + k.4$$

Jika diselesaikan dengan cara menaik:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a_0 + 4 \\
a_2 &= a_1 + 4 = (a_0 + 4) + 4 = a_0 + 4 + 4 = a_0 + 2.4 \\
a_3 &= a_2 + 4 = (a_0 + 4 + 4) + 4 = a_0 + 4 + 4 + 4 = a_0 + 3.4 \\
a_4 &= a_3 + 4 = (a_0 + 4 + 4 + 4) + 4 = a_0 + 4 + 4 + 4 + 4 = a_0 + 4.4 \\
&\vdots \\
a_k &= a_0 + k.4 = 1 + k.4
\end{aligned}
$$

2. Penyelesaian Relasi Rekursif melalui Persamaan Karakteristik

2.1 Relasi rekursif Linear dengan Koefisien Konstan

Misalkan n dan k adalah bilangan-bilangan bulat tidak negatif dengan $n \geq k$. Relasi rekursif linear berderajat k adalah relasi yang berbentuk:

$$c_0(n)a_n + c_1(n)a_{n-1} + ... + c_k(n)a_{n-k} = f(n) \text{ dan } c_k(n) \neq 0$$

Jika $c_0(n) + c_1(n) + ... + c_k(n)$ semuanya konstanta, maka relasi rekursif disebut relasi rekursi linear dengan koefisien konstan.

Jadi relasi rekursif linear dengan koefisien konstan adalah:

$c_0(n)a_n + c_1(n)a_{n-1} + ... + c_k(n)a_{n-k} = f(n)$ Apabila dalam persamaan tersebut, $f(n) = 0$, maka relasi rekursifnya disebut relasi rekursif homogen linear dengan koefisisen onstan. Jika tidak demikian, maka nonhomogen. Misalnya:

a. $2a_r + 3a_{r-1} = 2^r$ adalah sebuah relasi rekursif linear berderajat satu dengan koefisien konstanta.

b. $a_1 = a_2 = 0$; $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1$, $n \geq 3$ adalah relasi rekursif linear nonhomogen berderajat dua dengan koefisien konstanta.

c. $a_1 = a_2 = 1$; $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1$, $n \geq 3$ adalah relasi rekursif linear nonhomogen berderajat dua dengan koefisien konstanta.

d. $a_1 = a_2 = 1$; $a_n = a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + a_{n-1} a_0$, $n \geq 1$ adalah relasi rekursi linear.

e. $D_0 = 1$; $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$, $n \geq 1$ adalah relasi rekursif linear nonhomogen dengan koefisien nonkonstanta.

Dalam kajian ini, akan dibahas cara menyelesaikan relasi rekursif linear dengan koefisien konstan $c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + ... + c_k a_{n-k} = f(n)$

Untuk menelesaikannya, ada 2 langkah yang harus dilakukan. Pertama, relasi rekursif terlebih dahulu dibuat homogen dengan cara mengambil $f(n) = 0$. Langkah kedua adalah mencari penyelesian khususnya. Penyelesaian relasi rekursif linear dengan koefisien konstan adalah gabungan dari penyelesaian homogen dan penyelesian khusus yang disebut dengan penyelesian total.

Contoh 1

Carilah penyelesian total relasi rekursif di bawah ini:

Diberikan $a_n - 7a_{n-1} + 10a_{n-2} = 4^n$ untuk $n \geq 2$ dengan kondisi awal $c_0 = 8$ dan $c_1 = 36$

Penyelesaian:

Relasi rekursif homogennya adalah: $a_n - 7a_{n-1} + 10a_{n-2} = 0$

Persamaan karakteristiknya adalah $x^2 - 7x + 10 = 0$

Sehingga diperoleh akar-akar karakteristiknya adalah $x_1 = 2$ dan $x_2 = 5$

Penyelesaian homogennya adalah $a_n = c_1 2^n + c_2 5^n$

Karena $f(n) = 4^n$ dan 4 bukan akar kareakteristik, maka untuk mencari penyelesaian khusus diuji dalam bentuk $a_n^k = P(4)^n$. Penyelesaian khusus ini selanjutnya disubstitusikan ke relasi rekursif mula-mula. Sehingga diperoleh:

$$P4^n - 7(P4^{n-1}) + 10(P4^{n-2}) = 4^n \Leftrightarrow P4^{n-2}(4^2 - 7.4 + 10) = 4^n$$

$$\Leftrightarrow -2P4^{n-2} = 4^n$$

$$\Leftrightarrow -2P = 16$$

$$\Leftrightarrow P = -8$$

Sehingga penyelesaian khususnya adalah $a_n^k = -8(4)^n$

Penyelesaian Total = penyelesaian homogen + penyelesaian khusus = $a_n = c_1 2^n + c_2 5^n - 8(4)^n$

Untuk mencari nilai c_1 dan c_2 digunakan kondisi awal yang diberikan:

$a_0 = 8$ sehingga menjadi

$$a_0 = c_1 2^0 + c_2 5^0 - 8(4)^0$$

$8 = c_1 2^0 + c_2 5^0 - 8(4)^0$

$8 = c_1 + c_2 - 8$

$16 = c_1 + c_2$

$a_1 = 36$

Sehingga $36 = c_1 2^1 + c_2 5^1 - 8(4)^1$

$36 = 2c_1 + 5c_2 - 32$

$68 = 2c_1 + 5c_2$

Diperoleh sistem persamaan linear

$c_1 + c_2 = 16$

$2c_1 + 5c_2 = 68$

Yang bila diselesaikan akan menghasilkan $c_1 = 4$ dan $c_2 = 12$, jadi penyelesaian relasi rekursif mula-mula adalah $a_n = 4(2)^n + 12(5)^n - 8(4)^n$

2.2 Penyelesaian Relasi Rekursif Homogen Linear dengan Koefisien Konstan

Misalkan diberikan suatu relasi rekursif homoogen linear dengan koefisien konstan:

$a_n + c_1 a_{n-1} + ... + c_k a_{n-k} = 0$ dengan $c_k \neq 0$ dan $n \geq k$ .... (1)

Persamaan karakteristik yang sesuai dengan relasi rekursif tersebut adalah:

$t^k + c_1 t^{k-1} + ... + c_k = 0$ .... (2)

Misalkan $a_1, a_2, a_3, ..., a_k$ adalah akar-akar persamaan karakteristik. Ada dua kemungkinan akar yaitu:

a. Semua akar berbeda

Jika semua akar persamaan karakteristik pada persamaan (2) berrbeda, maka relasi rekursif pada persamaan (1) mempunyai penyelesaian:

$a_n = c_1 \alpha_1^n + c_2 \alpha_2^n + ... + c_k \alpha_k^n$ .... (3)

Dengan $c_1, c_2, c_3, ..., c_k$ adalah konstanta yang nilainya ditentukan berdasarkan kondisi awal.

b. Ada akar yang kembar

Misalkan persamaan karakteristik (2) mempuyai p buah akar yang sama. Jadi akar-akarnya adalah:

$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_p, \alpha_{p=1}, ..., \alpha_k$

Maka penyelesaian relasi reursif (1) adalah

$a_n = \left(c_1 + c_2 n + ... + c_p n^{p-1}\right)\alpha_1^n + c_{p+1}\alpha_{p+1}^n + ... + c_k \alpha_k^n$ .... (4)

dengan $c_1, c_2, c_3, ..., c_k$ adalah konstanta-konstanta yang nilainya ditentukan berdasarkan kondisi awal.

Contoh 2

Diberikan relasi rekurensi

$a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$ untuk $n \geq 2$ dengan kondisi awal $a_0 = 1$ dan $a_1 = 3$

Penyelesaian:

Relasi rekurensi $a_n - 3a_{n-1} - 4a_{n-2} = 0$ merupakan relasi rekursif homogen linear dengan koefisien konstan.

Persamaan karakteristik yang sesuai adalah $t^2 - 3t - 4 = (t-4)(t+1) = 0$ yang mempunyai akar - akar karakteristik $\alpha_1 = 4$ dan $\alpha_2 = -1$ (akar-akar berbeda). Karena semua akar-akar karakteristiknya berbeda maka penyelesaiannya adalah:

$a_n = c_1 4^n + c_2 (-1)^n$

Untuk menentukan c_1 dan c_2 digunakan kondisi awal $a_0 = 1$ diperoleh persamaan $1 = c_1 4^0 + c_2 (-1)^0 = c_1 + c_2$, sedangkan untuk kondisi awal $a_1 = 3$ diperolah persamaan $3 = c_1 4^1 + c_2 (-1)^1 = 4c_1 - c_2$ sehingga diperoleh sistem persamaan linear:

$c_1 + c_2 = 1$

$4c_1 - c_2 = 3$

Dengan menggunakan metode eliminisasi diperoleh penyelesaian $c_1 = \frac{4}{5}$ dan $c_2 = \frac{1}{5}$ maka relasi rekursif $a_n - 3a_{n-1} - 4a_{n-2} = 0$ mempunyai penyelesaian $a_n = \frac{4}{5} 4^n + \frac{1}{5} (-1)^n$.

Contoh 3

Diberikan $a_n = 2a_{n-1} + 15a_{n-2} - 36a_{n-3}$, $n \geq 4$ dengan kondisi awal $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ dan $a_2 = 2$

Penyelesian:

Persamaan karakteristik yang sesuai dengan relasi rekursif $a_n - 2a_{n-1} - 15a_{n-2} + 36a_{n-3} = 0$ adalah $x^n - 2x^2 - 15x + 36 = 0$ dengan cara Horner dengan mudah diperoleh akar-akar persamaan karakteristik $x_{1,2} = 3$ (rangkap dua) dan $x_3 = -4$. Penyelesian umum dari relasi rekursif adalah $a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n - c_3 x_3^n$ dengan mensubstitusi akar-akar karakteristik yang diperoleh tadi maka didapat persamaan $a_n = c_1 (3)^n + c_2 n(3)^n - c_3 (-4)^n$. Dengan kondisi awal yang diberikan $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ dan $a_2 = 2$ diperoleh:

(i) $a_0 = c_1 (3)^0 + c_2 n(3)^0 + c_3 (-4)^0$

$\Leftrightarrow 0 = c_1 (3)^0 + c_2 n(3)^0 + c_3 (-4)^0$

$\Leftrightarrow 0 = c_1 - c_3$

$\Leftrightarrow c_1 = -c_3$ ..... (*)

(ii) $a_1 = c_1(3)^1 + c_2 n(3)^1 + c_3(-4)^1$

$\Leftrightarrow 1 = c_1(3) + c_2.1.(3) + c_3(-4)$

$\Leftrightarrow 1 = 3c_1 + 3c_2 - 4c_3$ ..... (**)

(iii) $a_2 = c_1(3)^2 + c_2 n(3)^2 + c_3(-4)^2$

$\Leftrightarrow 2 = c_1(3)^2 + c_2.2.(3)^2 + c_3(-4)^2$

$\Leftrightarrow 2 = 9c_1 + 18c_2 + 16c_3$ ..... (***)

Dengan melakukan substitusi persamaan (*) ke persamaan (**) dan persamaan (***) diperoleh

$1 = 3c_2 - 7c_3$ ..... (****)

$2 = 18c_2 + 7c_3$ ..... (*****)

Kemudian melakukan eliminasi pada kedua persamaan di atas sehingga diperoleh $c_1 = \frac{4}{49}$, $c_2 = \frac{1}{7}$ dan $c_3 = -\frac{4}{49}$. Jadi diperoleh penyelesaian khusus dari relasi rekursif $a_n = 2a_{n-1} + 15a_{n-2} - 36a_{n-3}$ adalah $a_n = \frac{4}{49}(3)^n + \frac{1}{7}n(3)^n - \frac{4}{49}(-4)^n$

2.3 Relasi Rekursif Tidak Homogen dengan Koefisien Konstanta

Bentuk umum dari relasi rekursif linear tidak homogen dengan koefisien konstanta adalah sebagai berikut:

$a_n + c_1 a_{n-1} + ... + c_k a_{n-k} = f(n)$; $c_k \neq 0$; $f(n) \neq 0$ dengan kondisi awal (syarat batas), dan untuk $1 \leq i \leq k$, c_k = konstanta. Belum ada prosedur umum untuk menentukan penyelesaian khusus bagi suatu relasi rekursif. Dalam kasus yang sederhana, langkah pertama yaitu dengan membuat bentuk umum dari penyelesaian khusus berdasarkan bentuk *f*(*n*) dan kemudian menentukan solusi pastinya berdasarkan relasi rekusrsif yang diberikan. Perhatikan kasus-kasus berikut ini.

Kasus 1

Bila *f*(*n*) merupakan suatu polinom berderajat *t* di dalam *n* yaitu:

$A_1 n^t + A_2 n^{t-1} + ... + A_t n + A_{t+1}$

Maka bentuk umum penyelesaian khususnya

$B_1 n^t + B_2 n^{t-1} + ... + B_t n + B_{t+1}$

Contoh 1

Misalkan mencari penyelesaian khusus untuk relasi rekursif tidak homogen $a_n + 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 3n^2 - 2n + 1$ .... (1)

Penyelesaian khususnya mempunyai bentuk

$B_1n^2 + B_2n + B_3$ .... (2)

Dengan mensubstitusikan persamaan (2) ke persamaan (1) diperoleh:

$(B_1n^2 + B_2n + B_3) + 5(B_1(n-1)^2 + B_2(n-1) + B_3) + 6(B_1(n-2)^2 + B_2(n-2) + B_3)$
$= 3n^2 - 2n + 1$

setelah disederhanakan menjadi

$12B_1n^2 - (34B_1 - 12B_2)n + (29B_1 - 17B_2 + 12B_3) = 3n^2 - 2n + 1$.......... (3)

Dengan membandingkan koefisisen kedua ruas dari persamaan (3) maka dapat diperoleh persamaan-persmaan:

$12B_1 = 3$; $34B_1 - 12B_2 = 2$; $29B_1 - 17B_2 + 12B_3 = 1$ yang menghasilkan**:**

$B_1 = \frac{1}{4}$ **;** $B_2 = \frac{13}{24}$ **dan** $B_3 = \frac{71}{288}$

Jadi solusi khususnya adalah

$a_n^{(p)} = \frac{1}{4}n^2 + \frac{13}{24}n + \frac{71}{288}$

Kasus 2

Bila $f(n)$ berbentuk β^n maka penyelesaian khususnya mempunyai bentuk umum $B\beta^n$ dengan syarat β bukan akar karakteristik relasi rekusrsif tersebut

Contoh 2

Misalkan mencari penyelesaian khusus untuk relasi rekusrsif tidak homogen $a_n + 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 42.4^n$ .... (1)

Penyelesaian khususnya mempunyai bentuk umum $B.4^n$ .... (2)

Dengan mensubtitusikan persamaan (2) ke dalam (1) dapat diperoleh

$B.4^n + 5B.4^{n-1} + 6B.4^{n-2} = 42.4^n$

$\Leftrightarrow B.4^n + 5B.4^n.4^{-1} + 6B.4^n.4^{-2} = 42.4^n$

$\Leftrightarrow B.4^n + \frac{5B}{4}.4^n + \frac{6B}{16}.4^n = 42.4^n$

$\Leftrightarrow \frac{42B}{16}.4^n = 42.4^n$

$\Leftrightarrow B = 16$

Jadi penyelesaian khusus adalah $a_n^{(p)} = 16.4^n$

Kasus 3

Bila $f(n)$ berbentuk perkalian antara polinomial dengan fungsi eksponen, amaka solusi khususnya akan berbentuk perkalian antara kasus 1 dengan kasus 2. Yaitu bila $f(n)$ berbentuk $(A_1n^t + A_2n^{t-1} + ... + A_tn + A_{t+1})\beta^n$ maka bentuk umum penyelesaian khususnya adalah $(B_1n^t + B_2n^{t-1} + ... + B_tn + B_{t+1})\beta^n$.

Contoh 3

Misalkan mencari penyelesaian khusus untuk relasi rekursif tidak homogen

$a_n = a_{n-1} + 3n.2^n$ .... (1)

Persamaan karakteristiknya adalah $x = 1 = 3n.2^n$

Penyelesaian khususnya mempunyai bentuk umum $[B_1 n + B_0].2^n$ ....(2).

Dengan mensubtitusikan persamaan (20 ke persamaan (1) maka diperoleh

$[B_1 n + B_0].2^n + [B_1(n-1) + B_0].2^{n-1} = 3n.2^n$

$\Leftrightarrow B_1 n.2^n + B_0.2^n + B_1 n.2^{n-1} - B_1.2^{n-1} + B_0.2^{n-1} = 3n.2^n$

$\Leftrightarrow B_1 n.2^n + B_0.2^n + \frac{B_1}{2} n.2^n - \frac{B_1}{2}.2^n + \frac{B_0}{2}.2^n = 3n.2^n$

$\Leftrightarrow \left(B_1 + \frac{B_1}{2}\right) n.2^n + \left(\frac{3B_0}{2} - \frac{B_1}{2}\right) B_0.2^n = 3n.2^n$ .... (3)

Dengan membandingkan koefisien kedua ruas persamaan (3) diperoleh persamaan-persamaan $\left(B_1 + \frac{B_1}{2}\right) = 3$ dan $\left(\frac{3B_0}{2} - \frac{B_1}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow B_1 = 2$ dan $B_0 = \frac{2}{3}$

Jadi solusi khususnya adalah $a_n^{(p)} = \left(2n + \frac{2}{3}\right) \cdot 2^n$

3. Penyelesaian Relasi Rekursif dengan Fungsi Pembangkit

Untuk suatu relasi rekursif ordo ke-*k* yang menspesifikasikan suatu fungsi numerik maka harus diketahui untuk nilai-nilai *n* berapa saja relasi itu berlaku. Perlu dicatat bahwa relasi itu berlaku hanya jika $n \geq k$ sebab untuk $n < k$ relasi itu akan melibatkan a_{-i} yaitu sesuatu yang tidak didefinisikan.

Prosedur umum untuk menentukan fungsi pembangkit bagi fungsi numerik *a* dari relasi rekursif $c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + .c_2 a_{n-2} + ... + c_k a_{n-k} = f(n)$ yang berlaku untuk $n \geq s$ dalam hal ini $s \geq k$ dengan mengalikan kedua ruas ini dengan persmaan dengan z^n dan kemudian menjumlahkan hasilnya dari *n* = s ke $n = \infty$ maka diperoleh $\sum_{n=s}^{\infty} (c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + .c_2 a_{n-2} + ... + c_k a_{n-k}) z^n = \sum_{n=s}^{\infty} f(n) z^n$

Karena

$$\sum_{n=s}^{\infty} c_0 a_n z^n = c_0 \left(A(z) - a_0 - a_1 z - a_2 z^2 - ... - a_{s-1} z^{s-1}\right)$$

$$\sum_{n=s}^{\infty} c_1 a_{n-1} z^n = c_1 z \left(A(z) - a_0 - a_1 z - a_2 z^2 - ... - a_{s-1} z^{s-2}\right)$$

....

$$\sum_{n=s}^{\infty} c_k a_{n-1} z^n = c_1 z^k \left(A(z) - a_0 - a_1 z - a_2 z^2 - ... - a_{s-1} z^{s-k-1}\right)$$

Maka dapat diperoleh

$$A(z) = \frac{1}{c_0 + c_1 z + ... + c_k z^k} \begin{bmatrix} \sum_{n=s}^{\infty} f(n) z^n + c_0 \left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_{s-1} z^{s-1}\right) \\ + c_1 z\left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_{s-1} z^{s-2}\right) \\ + ... \\ + c_k z^k \left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_{s-1} z^{s-k-1}\right) \end{bmatrix}$$

Contoh 1

Misalkan menyelesaikan relasi rekursif $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 2^n + n$, $n \geq 2$ dengan syarat batas $a_0 = 1$ dan $a_1 = 1$ dengan terlebih dahulu mencari fungsi pembangkitnya, A(*z*). Karena $\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n - 5\sum_{n-2}^{\infty} a_{n-1} z^n + 6\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} z^n = \sum_{n=2}^{\infty} 2^n z^n + \sum_{n=2}^{\infty} r z^n$ maka diperoleh

$$A(z) - a_0 - a_1 z - 5z\left[A(z) - a_0\right] + 6z^2 A(z) = \frac{4z^2}{1-2z} + \left(\frac{1}{(1-z)^2} - 1\right)$$

Yang dapat disederhanakan menjadi

$$A(z) = \frac{1 - 8z + 27z^2 - 35z^3 + 14z^4}{(1-z)^2 (1-2z)^2 (1-3z)}$$

$$A(z) = \frac{\frac{5}{4}}{1-z} + \frac{\frac{1}{2}}{(1-z)^2} - \frac{3}{(1-2z)} - \frac{2}{1-2z)^2} + \frac{\frac{17}{4}}{1-3z}$$

Sehingga diperoleh

$$a_n = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}(n+1) - 3.2^n - 2(n+1).2^n + \frac{17}{4}.3^n$$

$$a_n = \frac{7}{4} + \frac{n}{2} - n.2^{n+1} - 5.2^n + \frac{17}{4}.3^n$$

KESIMPULAN

Suatu relasi rekursif dapat diaplikasikan dalam beberapa bentuk formula dikarena menggunakan tahapan-tahapan dalam menyelesaikannya. Tahapan yang dimaksud adalah dengan cara iterasi, dengan persamaan karakteristik, dan dengan fungsi pembangkit. Dengan formula tersebut maka barisan yang didefinisikan secara rekursif tidak perlu menggunakan kondisi awal lagi dalam menentukan nilainya. Untuk menentukan nilai suatu barisan yang didefinisikan secara rekursif dapat menggunakan relasi rekursif. Dalam menyelesaikan relasi rekursif dapat menggunakan beberapa cara yaitu cara iterasi, persamaan karakteristik, dan fungsi pembangkit. Cara iterasi dapat menentukan solusi umum dengan beberapa langkah yaitu:

a. Menghitung suku-suku barisan secara berurutan terus menerus hingga kita memperoleh pola tertentu
b. Kemudian, berdasarkan pola tersebut rumus eksplisit dibuat.
c. Untuk mendapat pola-pola suku tersebut, barisan dapat dihitung secara menaik (dihitung berturut-turut $a_0, a_1, a_2, ...)$ atau menurun (dihitung berturut-turut $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ...)$.

Sedangkan cara menggunakan persamaan karakteristik dapat dispesifikasikan dengan beberapa tahap yaitu :

1. Relasi Rekursif Linear Dengan Koefisien Konstan.
2. Penyelesaian Relasi Rekursif Homogen Linear Dengan Koefisien Konstan.
3. Relasi Rekursif Tidak Homogen dengan Koefisien Konstanta.

Cara yang terakhir untuk menyelesaikan trelasi rtekursif adalah dengan menggunakan fungsi pembangkit. Prosedur umum untuk menentukan fungsi pembangkit bagi fungsi numerik *a* dari relasi rekursif

$$c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + ... + c_k a_{n-k} = f(n)$$

yang berlaku untuk $n \geq s$, dalam hal ini $s \geq k$ yaitu dengan mengalikan kedua ruas persamaan ini dengan z^n dan kemudian menjumlahan hasilnya dari *n* = s ke $n = \infty$.

DAFTAR PUSTAKA

Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Bartle, R.G and Sherbet, D.R. 1982. *Introduction to Real Analysis, 2nd* ed. New York:John Wiley and sons

Fletcher P. Hoyle H, Wayne, C. P. 1991. *Fundation of Discrete Mathematic*. Boston:Pws Kent Publishing Company

Hutahaean, Efendi. 1989. *Analisis Real II*. Jakarta: Penerbit Karunika Universitas Terbuka.

Niven, Ivan dan Zuckerman. 1980. *An Introduction To The Theory Numbers*. NewYork: John Willey & Son.

Purcell, Edwin J. 2003. *Kalkulus Jilid 2*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Siang, Jong Jek. 2002. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya Pada Ilmu Komputer*.Yogyakarta: Andi.

Sutarno, Heri, dkk. 2005. *Matematika Diskrit*. Malang: UM Press.